

\$2.4 初等行变换和初等矩阵

高等代数 <https://gdfzu.club>

Outline

- 1 Gauss 消去法与行初等变换
- 2 初等矩阵与矩阵乘法
- 3 用初等行变换/矩阵化简矩阵

Gauss 消去法的矩阵表示

- 线性方程组 $AX = \beta$

Gauss 消去法的矩阵表示

- 线性方程组 $AX = \beta \Leftrightarrow$ 增广矩阵 $(A|\beta)$

Gauss 消去法的矩阵表示

- 线性方程组 $AX = \beta \Leftrightarrow$ 增广矩阵 $(A|\beta)$

例 1

通过增广矩阵化简求线性方程组

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

行初等变换与初等矩阵

定义 1.1

矩阵的下列三种变换称为行初等变换指：

行初等变换与初等矩阵

定义 1.1

矩阵的下列三种变换称为行初等变换指：

- ① 行互换变换：互换矩阵中的两行的位置；

行初等变换与初等矩阵

定义 1.1

矩阵的下列三种变换称为行初等变换指：

- ① 行互换变换：互换矩阵中的两行的位置；
- ② 行倍法变换：用一个非零数 c 乘矩阵的一行；

行初等变换与初等矩阵

定义 1.1

矩阵的下列三种变换称为行初等变换指：

- ① 行互换变换：互换矩阵中的两行的位置；
- ② 行倍法变换：用一个非零数 c 乘矩阵的一行；
- ③ 行消法变换：将矩阵的某一行乘以 c 加到另一行上去。

行初等变换与初等矩阵

定义 1.1

矩阵的下列三种变换称为行初等变换指：

- ① 行互换变换：互换矩阵中的两行的位置；
- ② 行倍法变换：用一个非零数 c 乘矩阵的一行；
- ③ 行消法变换：将矩阵的某一行乘以 c 加到另一行上去。

定义 1.2

对单位矩阵做一次行初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

互换矩阵

- 互换单位矩阵的第 i, j 两行 (列):

互换矩阵

- 互换单位矩阵的第 i, j 两行 (列):

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

互换矩阵

- 互换单位矩阵的第 i, j 两行 (列):

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

互换矩阵

- 互换单位矩阵的第 i, j 两行 (列):

$$\begin{pmatrix}
 1 & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{matrix}
 i \\
 j \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 i \\
 j
 \end{matrix}$$

互换矩阵

- 互换单位矩阵的第 i, j 两行 (列):

$$E(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

The matrix $E(i, j)$ is a permutation matrix that swaps rows i and j . The diagonal elements are 1, except for positions (i, i) and (j, j) which are 0. The elements at (i, j) and (j, i) are 1. The indices i and j are marked in red in the original image.

倍法矩阵

- 非零常数 c 乘以单位矩阵的第 i 行 (列)

$$E(i(c)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & c & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

i (above the matrix) i (to the right of the matrix)
 c (below the matrix)

消法矩阵

- 行变换：将第 j 行乘以常数 c 加到第 i 行。

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

消法矩阵

- 行变换：将第 j 行乘以常数 c 加到第 i 行。

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

消法矩阵

- 行变换：将第 j 行乘以常数 c 加到第 i 行。

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & c & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

消法矩阵

- 行变换：将第 j 行乘以常数 c 加到第 i 行。

$$E(i, j(c)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & c & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

消法矩阵

- 行变换：将第 j 行乘以常数 c 加到第 i 行。

$$E(i, j(c)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & c & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

Outline

- 1 Gauss 消去法与行初等变换
- 2 初等矩阵与矩阵乘法
- 3 用初等行变换/矩阵化简矩阵

初等矩阵与矩阵乘法

例 2

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, 计算 $E(1, 3)A$, $E(2(-1))A$, $E(1, 2(-3))A$ 。

初等矩阵与矩阵乘法

例 2

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, 计算 $E(1, 3)A$, $E(2(-1))A$, $E(1, 2(-3))A$ 。

定理 2.1

设 A 是任意给定的一个 $n \times m$ 阶矩阵。则对 A 做一次初等行变换等价于左乘相应的初等矩阵。

例子

例 2.1

求 $E(1, 3)^{2025} A E(1, 3(1))$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Outline

- 1 Gauss 消去法与行初等变换
- 2 初等矩阵与矩阵乘法
- 3 用初等行变换/矩阵化简矩阵

阶梯型矩阵

定义 3.1

设 A 是一个矩阵。对 A 的每一个元素不全为 0 的行，称该行从左起第一个非 0 元为一个主元。

阶梯型矩阵

定义 3.1

设 A 是一个矩阵。对 A 的每一个元素不全为 0 的行，称该行从左起第一个非 0 元为一个主元。若矩阵 A 满足条件：

则称矩阵 A 为阶梯形矩阵，或称为行阶梯形矩阵。

阶梯型矩阵

定义 3.1

设 A 是一个矩阵。对 A 的每一个元素不全为 0 的行，称该行从左起第一个非 0 元为一个**主元**。若矩阵 A 满足条件：

- ① 对于每一个元素不全为 0 的行，主元的列指标随行指标的增大**严格**增加；

则称矩阵 A 为**阶梯形矩阵**，或称为**行阶梯形矩阵**。

阶梯型矩阵

定义 3.1

设 A 是一个矩阵。对 A 的每一个元素不全为 0 的行，称该行从左起第一个非 0 元为一个**主元**。若矩阵 A 满足条件：

- ① 对于每一个元素不全为 0 的行，主元的列指标随行指标的增大**严格**增加；
- ② 元素全为 0 的行下方（若存在）必定都是 0，即全 0 行集中在矩阵的底部；

则称矩阵 A 为**阶梯形矩阵**，或称为**行阶梯形矩阵**。

阶梯型矩阵

定义 3.1

设 A 是一个矩阵。对 A 的每一个元素不全为 0 的行，称该行从左起第一个非 0 元为一个**主元**。若矩阵 A 满足条件：

- ① 对于每一个元素不全为 0 的行，主元的列指标随行指标的增大**严格**增加；
- ② 元素全为 0 的行下方（若存在）必定都是 0，即全 0 行集中在矩阵的底部；

则称矩阵 A 为**阶梯形矩阵**，或称为**行阶梯形矩阵**。

- 0 矩阵都是阶梯型矩阵。

阶梯型矩阵的结构特征

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯型矩阵的结构特征

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

阶梯型矩阵的结构特征

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯型矩阵的结构特征

$$\begin{pmatrix}
 \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\
 0 & \boxed{2} & -3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \quad
 \begin{pmatrix}
 \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\
 0 & \boxed{2} & -3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\
 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

阶梯型线性方程组

例 3

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Gauss 消去法的矩阵描述

定理 3.1

设 A 是任意一个给定的矩阵, 则存在初等矩阵 $P_1, \dots, P_k$, 使得 $P_k \cdots P_1 A$ 是阶梯形矩阵。

Gauss 消去法的矩阵描述

定理 3.1

设 A 是任意一个给定的矩阵, 则存在初等矩阵 $P_1, \dots, P_k$, 使得 $P_k \cdots P_1 A$ 是阶梯形矩阵。

例 4

用行初等变换将矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

化为阶梯形矩阵。