

\$2.3 分块矩阵

刘月 liuyue@fzu.edu.cn

Outline

引例

- 局部与整体，分层次理解世界

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E_3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

引例

- 局部与整体，分层次理解世界



$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E_3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

引例

- 局部与整体，分层次理解世界



$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E_3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

引例

- 局部与整体，分层次理解世界



$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E_3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

引例

- 局部与整体，分层次理解世界



$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E_3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

分块矩阵

定义 1.1

对 $m \times n$ 矩阵 A ，先用若干条横线将其划成 r 块，再用若干条竖线将它划成 s 块，这样我们就得到了 rs 块 **分块矩阵**，记为

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{r \times s},$$

其中 A_{ij} 是 $m_i \times n_j$ 矩阵， $i = 1, 2, \dots, r$ ； $j = 1, 2, \dots, s$ ，满足 $m = \sum_{i=1}^r m_i$ ， $n = \sum_{j=1}^s n_j$ 。 A_{ij} 称为 A 的第 (i, j) 块， A 可记为 $A = (A_{ij})_{r \times s}$ 。

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4)$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4)$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4)$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4)$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix} \quad \text{其中 } B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4)$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix} \quad \text{其中 } C = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4)$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4)$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4)$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4)$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4)$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4)$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4) \quad \text{其中 } A_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4) \quad \text{其中 } A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4) \quad \text{其中 } A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

例

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ E_2 & C \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right) = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4) \quad \text{其中 } A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

特殊划分

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$,

- 按行分块 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$, 其中 $A_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$ 。

$A_1, A_2, \dots, A_m$ 称为 A 的行向量组。

- 按列分块 $A = (B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_n)$, 其中 $B_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 。

$B_1, B_2, \dots, B_n$ 称为 A 的列向量组。

特殊划分

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$,

- 按行分块 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$, 其中 $A_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$ 。
 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 称为 A 的行向量组。

- 按列分块 $A = (B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_n)$, 其中 $B_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 。

$B_1, B_2, \dots, B_n$ 称为 A 的列向量组。

特殊划分

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$,

- 按行分块 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$, 其中 $A_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$ 。
 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 称为 A 的行向量组。

- 按列分块 $A = (B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_n)$, 其中 $B_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 。

$B_1, B_2, \dots, B_n$ 称为 A 的列向量组。

特殊划分

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$,

- 按行分块 $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$, 其中 $A_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$ 。
 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 称为 A 的行向量组。

- 按列分块 $A = (B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_n)$, 其中 $B_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 。
 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 称为 A 的列向量组。

Outline

分块矩阵的加法

设 A, B 是两个 $m \times n$ 矩阵, 对它们用同样的分法分块:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中子块 A_{ij} 与 B_{ij} 为同型矩阵, 则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的数乘

设分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{F}$, 则

$$cA = \begin{pmatrix} cA_{11} & \cdots & cA_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cA_{s1} & \cdots & cA_{sr} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的数乘

设分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{F}$, 则

$$cA = \begin{pmatrix} cA_{11} & \cdots & cA_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cA_{s1} & \cdots & cA_{sr} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法

把 $A = (a_{ik})_{m \times p}$, $B = (b_{kj})_{p \times n}$ 分块成:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{tj}$ 的行数, 则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^t A_{ik} B_{kj}$, ($i = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, r$)。

分块矩阵的乘法

把 $A = (a_{ik})_{m \times p}$, $B = (b_{kj})_{p \times n}$ 分块成:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{tj}$ 的行数, 则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^t A_{ik} B_{kj}$, ($i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, r$)。

分块矩阵的乘法

把 $A = (a_{ik})_{m \times p}$, $B = (b_{kj})_{p \times n}$ 分块成:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, B_{2j}, \dots, B_{tj}$ 的行数, 则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^t A_{ik} B_{kj}$, ($i = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, r$)。

例

例 2.1

设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_s \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_s \end{pmatrix}$, 其中 A_i 和 B_i 为同阶方阵, 计算 AB 。

例

例 2.2

设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_s \end{pmatrix}$, 其中 A_i 是 n_i 阶方阵, 计算 A^k 。

例 2.3

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 A^{2025} 。

例

例 2.2

设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_s \end{pmatrix}$, 其中 A_i 是 n_i 阶方阵, 计算 A^k 。

例 2.3

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 A^{2025} 。

例

例 2.4

设 A 和 B 都为 n 阶方阵，计算 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^2$ 。

- 设 A 和 B 都为 n 阶方阵，则

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & A^2 \\ B^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 思考： $\begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = ?$

例

例 2.4

设 A 和 B 都为 n 阶方阵，计算 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^2$ 。

- 设 A 和 B 都为 n 阶方阵，则

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & A^2 \\ B^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 思考: $\begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = ?$

例

例 2.4

设 A 和 B 都为 n 阶方阵，计算 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^2$ 。

- 设 A 和 B 都为 n 阶方阵，则

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & A^2 \\ B^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 思考: $\begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = ?$

例

例 2.4

设 A 和 B 都为 n 阶方阵，计算 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^2$ 。

- 设 A 和 B 都为 n 阶方阵，则

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & A^2 \\ B^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 思考: $\begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = ?$

例

例 2.5

设 $A_{m \times n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, 以分块形式改写 $AX = \beta$ 。

例 2.6

设 $A_{m \times n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $B_{n \times s} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$, 以分块形式改写 AB 。

特别地, 设 $A_{m \times n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, 求 Ae_j 。

例

例 2.5

设 $A_{m \times n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, 以分块形式改写 $AX = \beta$ 。

例 2.6

设 $A_{m \times n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $B_{n \times s} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$, 以分块形式改写 AB 。

特别地, 设 $A_{m \times n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, 求 $A\epsilon_j$ 。

例

例 2.5

设 $A_{m \times n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, 以分块形式改写 $AX = \beta$ 。

例 2.6

设 $A_{m \times n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $B_{n \times s} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$, 以分块形式改写 AB 。

特别地, 设 $A_{m \times n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, 求 $A \varepsilon_j$ 。

例

例 2.7

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 求 $\varepsilon_i^T A$, $\varepsilon_i^T A \varepsilon_j$ 。

- $A \varepsilon_j$ 是 A 的第 j 列;
- $\varepsilon_i^T A$ 是 A 的第 i 行。

例 2.8

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 证明: 如果对任意的 n 维列向量 X 都有 $AX = 0$, 那么 $A = 0$ 。

例 2.9

设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 A^k 。

例

例 2.7

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 求 $\varepsilon_i^T A$, $\varepsilon_i^T A \varepsilon_j$ 。

- $A \varepsilon_j$ 是 A 的第 j 列;
- $\varepsilon_i^T A$ 是 A 的第 i 行。

例 2.8

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 证明: 如果对任意的 n 维列向量 X 都有 $AX = 0$, 那么 $A = 0$ 。

例 2.9

设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 A^k 。

例

例 2.7

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 求 $\varepsilon_i^T A$, $\varepsilon_i^T A \varepsilon_j$ 。

- $A \varepsilon_j$ 是 A 的第 j 列;
- $\varepsilon_i^T A$ 是 A 的第 i 行。

例 2.8

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 证明: 如果对任意的 n 维列向量 X 都有 $AX = 0$, 那么 $A = 0$ 。

例 2.9

设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 A^k 。

例

例 2.7

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 求 $\varepsilon_i^T A$, $\varepsilon_i^T A \varepsilon_j$ 。

- $A \varepsilon_j$ 是 A 的第 j 列;
- $\varepsilon_i^T A$ 是 A 的第 i 行。

例 2.8

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 证明: 如果对任意的 n 维列向量 X 都有 $AX = 0$, 那么 $A = 0$ 。

例 2.9

设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 A^k 。

例

例 2.7

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 求 $\varepsilon_i^T A$, $\varepsilon_i^T A \varepsilon_j$ 。

- $A \varepsilon_j$ 是 A 的第 j 列;
- $\varepsilon_i^T A$ 是 A 的第 i 行。

例 2.8

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 证明: 如果对任意的 n 维列向量 X 都有 $AX = 0$, 那么 $A = 0$ 。

例 2.9

设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 A^k 。

例

例 2.10

设 A 是 3 阶方阵, α_1 、 α_2 和 α_3 是 3 维列向量。已知

$$A\alpha_1 = -\alpha_1; A\alpha_2 = \alpha_2; A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3.$$

证明: $AP = PB$, 其中

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的转置

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{pmatrix} = A^T$$

即 $(A_{ij})_{r \times s}^T = (A_{ji}^T)_{s \times r}$ 。

分块矩阵的转置

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{pmatrix} = A^T$$

即 $(A_{ij})_{r \times s}^T = (A_{ji}^T)_{s \times r}$ 。