

§ 2.2 矩阵及其运算

高等代数 <https://gdfzu.club>

Outline

- 1 矩阵的定义
- 2 矩阵乘法
- 3 矩阵乘法的性质
- 4 矩阵的其它常用运算

Outline

① 矩阵的定义

② 矩阵乘法

③ 矩阵乘法的性质

④ 矩阵的其它常用运算

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 排成 m 行、 n 列的矩形阵列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称为 $m \times n$ 矩阵。

- a_{ij} — A 的第 i 行第 j 列元素或第 (i, j) 元素。
- m —行数, n —列数。
- 若 $m = n$, 则称 A 是一个 n 阶方阵。
- a_{ii} — A 的第 i 个(主)对角元。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 排成 m 行、 n 列的矩形阵列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称为 $m \times n$ 矩阵。

- a_{ij} — A 的第 i 行第 j 列元素或第 (i, j) 元素。
- m —行数, n —列数。
- 若 $m = n$, 则称 A 是一个 n 阶方阵。
- a_{ii} — A 的第 i 个(主)对角元。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 排成 m 行、 n 列的矩形阵列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称为 $m \times n$ 矩阵。

- a_{ij} — A 的第 i 行第 j 列元素或第 (i, j) 元素。
- m —行数, n —列数。
- 若 $m = n$, 则称 A 是一个 n 阶方阵。
- a_{ii} — A 的第 i 个(主)对角元。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 排成 m 行、 n 列的矩形阵列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称为 $m \times n$ 矩阵。

- a_{ij} — A 的第 i 行第 j 列元素或第 (i, j) 元素。
- m —行数, n —列数。
- 若 $m = n$, 则称 A 是一个 n 阶方阵。
- a_{ii} — A 的第 i 个(主)对角元。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 排成 m 行、 n 列的矩形阵列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称为 $m \times n$ 矩阵。

- a_{ij} — A 的第 i 行第 j 列元素或第 (i, j) 元素。
- m —行数, n —列数。
- 若 $m = n$, 则称 A 是一个 n 阶方阵。
- a_{ii} — A 的第 i 个(主)对角元。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 排成 m 行、 n 列的矩形阵列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称为 $m \times n$ 矩阵。

- a_{ij} — A 的第 i 行第 j 列元素或第 (i, j) 元素。
- m —行数, n —列数。
- 若 $m = n$, 则称 A 是一个 n 阶方阵。
- a_{ii} — A 的第 i 个(主)对角元。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 排成 m 行、 n 列的矩形阵列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称为 $m \times n$ 矩阵。

- a_{ij} — A 的第 i 行第 j 列元素或第 (i, j) 元素。
- m —行数, n —列数。
- 若 $m = n$, 则称 A 是一个 n 阶方阵。
- a_{ii} — A 的第 i 个(主)对角元。

特殊矩阵及其元素表示

- **实矩阵** 矩阵的元素全为实数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- **复矩阵** 矩阵的元素全为复数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{C} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- **零矩阵** $0_{m \times n}$ 矩阵的元素全为 0，即

$$a_{ij} = 0 (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- 列数为 1 的矩阵也可称为**列矩阵** (或**列向量**)；行数为 1 的矩阵也可称为**行矩阵** (或**行向量**)。

特殊矩阵及其元素表示

- **实矩阵** 矩阵的元素全为实数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- **复矩阵** 矩阵的元素全为复数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{C} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- **零矩阵** $0_{m \times n}$ 矩阵的元素全为 0，即

$$a_{ij} = 0 (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- 列数为 1 的矩阵也可称为**列矩阵**（或**列向量**）；行数为 1 的矩阵也可称为**行矩阵**（或**行向量**）。

特殊矩阵及其元素表示

- **实矩阵** 矩阵的元素全为实数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- **复矩阵** 矩阵的元素全为复数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{C} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- **零矩阵** $0_{m \times n}$ 矩阵的元素全为 0，即

$$a_{ij} = 0 (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- 列数为 1 的矩阵也可称为**列矩阵** (或**列向量**)；行数为 1 的矩阵也可称为**行矩阵** (或**行向量**)。

特殊矩阵及其元素表示

- **实矩阵** 矩阵的元素全为实数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- **复矩阵** 矩阵的元素全为复数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{C} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- **零矩阵** $0_{m \times n}$ 矩阵的元素全为 0，即

$$a_{ij} = 0 (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

- 列数为 1 的矩阵也可称为**列矩阵** (或**列向量**)；行数为 1 的矩阵也可称为**行矩阵** (或**行向量**)。

矩阵的相等

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{s \times t}$ 。则 $A = B$ 必须同时满足如下两个条件:

① $m = s, n = t$;

② $a_{ij} = b_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ 。

- **特别提示:**具有不同行列数的零矩阵代表不同的矩阵。如

$$0_{2 \times 3} \neq 0_{1 \times 6} \neq 0_{3 \times 2}$$

矩阵的相等

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{s \times t}$ 。则 $A = B$ 必须同时满足如下两个条件:

① $m = s, n = t$;

② $a_{ij} = b_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ 。

- **特别提示:**具有不同行列数的零矩阵代表不同的矩阵。如

$$0_{2 \times 3} \neq 0_{1 \times 6} \neq 0_{3 \times 2}$$

矩阵的相等

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{s \times t}$ 。则 $A = B$ 必须同时满足如下两个条件:

① $m = s, n = t$;

② $a_{ij} = b_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ 。

- **特别提示:**具有不同行列数的零矩阵代表不同的矩阵。如

$$0_{2 \times 3} \neq 0_{1 \times 6} \neq 0_{3 \times 2}$$

矩阵的相等

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{s \times t}$ 。则 $A = B$ 必须同时满足如下两个条件:

① $m = s, n = t$;

② $a_{ij} = b_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ 。

- **特别提示:**具有不同行列数的零矩阵代表不同的矩阵。如

$$0_{2 \times 3} \neq 0_{1 \times 6} \neq 0_{3 \times 2}$$

Outline

- 1 矩阵的定义
- 2 矩阵乘法**
- 3 矩阵乘法的性质
- 4 矩阵的其它常用运算

矩阵乘法的定义

定义 2.1

设 $A = (a_{ij})_{m \times k}$ 是 $m \times k$ 矩阵, $B = (b_{ij})_{k \times n}$ 是 $k \times n$ 矩阵, 则 A 与 B 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})_{m \times n}$, 其中

$$\begin{aligned}c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} \\ &= \sum_{s=1}^k a_{is}b_{sj}\end{aligned}$$

记作 $C = A \times B$, 或简记为 $C = AB$ 。

矩阵乘法的定义

定义 2.1

设 $A = (a_{ij})_{m \times k}$ 是 $m \times k$ 矩阵, $B = (b_{ij})_{k \times n}$ 是 $k \times n$ 矩阵, 则 A 与 B 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})_{m \times n}$, 其中

$$\begin{aligned}c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} \\ &= \sum_{s=1}^k a_{is}b_{sj}\end{aligned}$$

记作 $C = A \times B$, 或简记为 $C = AB$ 。

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

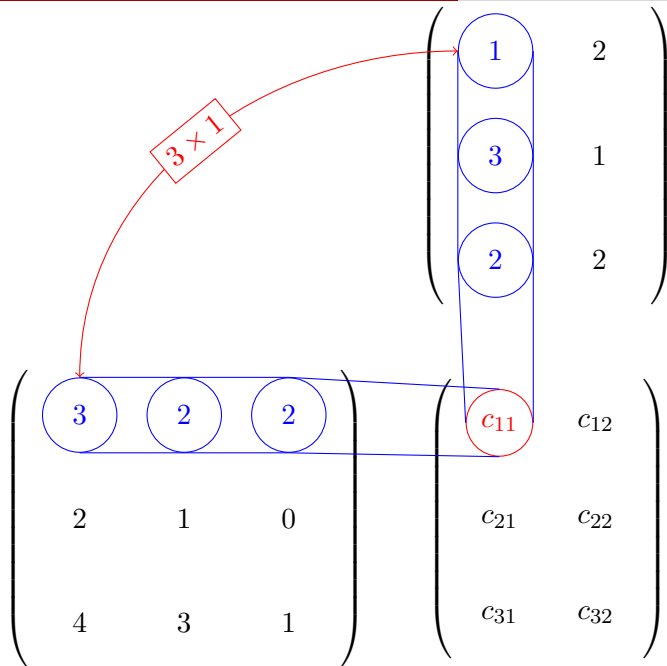
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

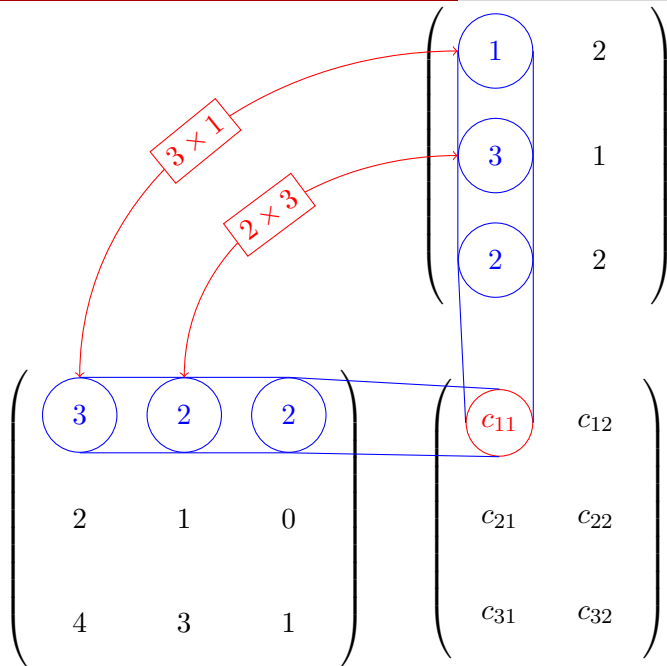
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

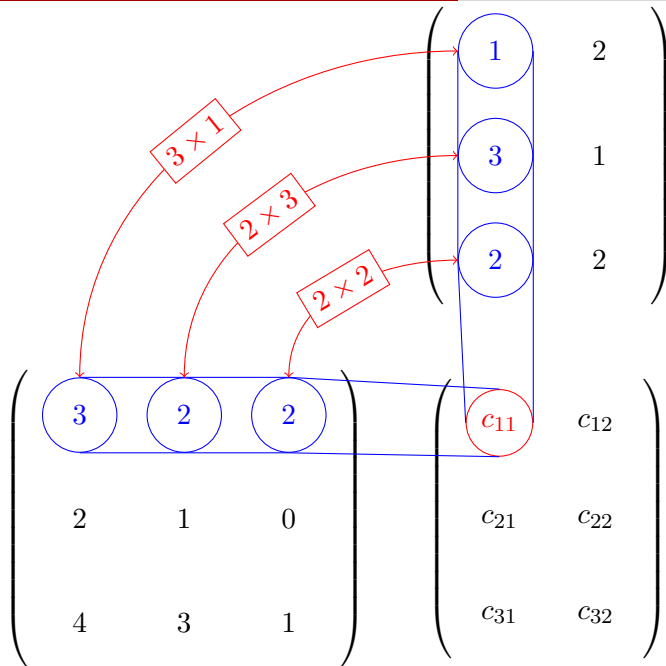
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

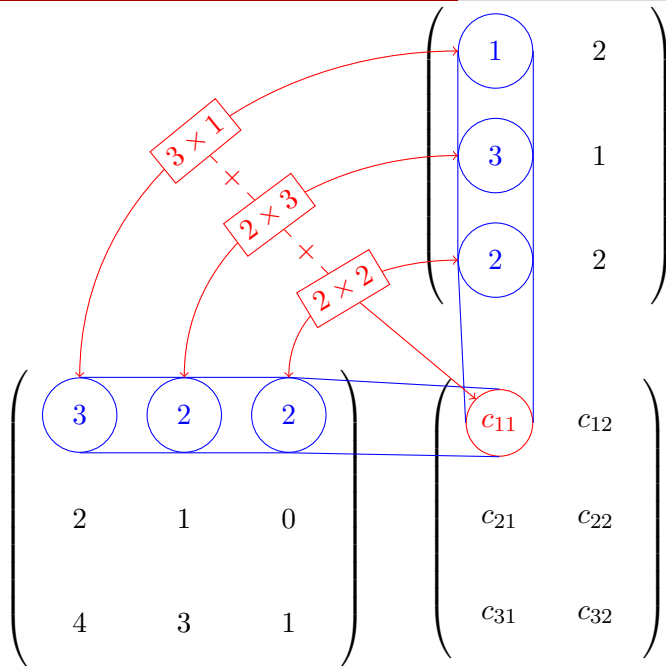
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

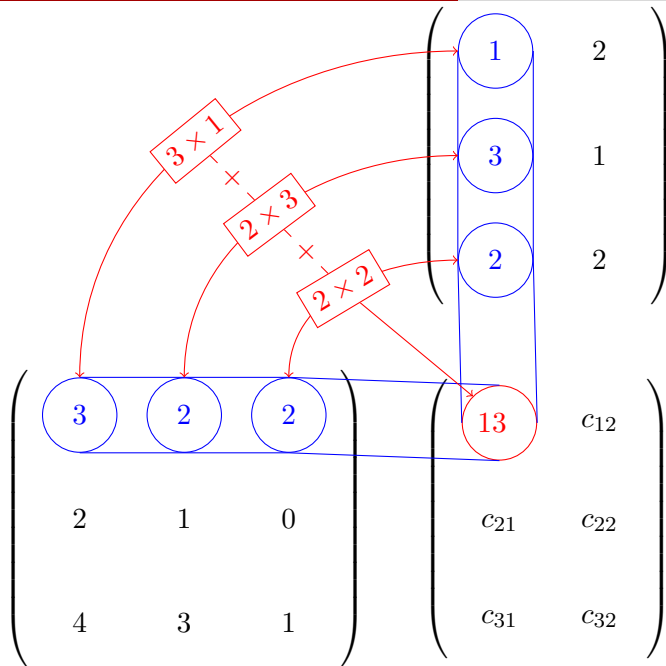
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$











$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

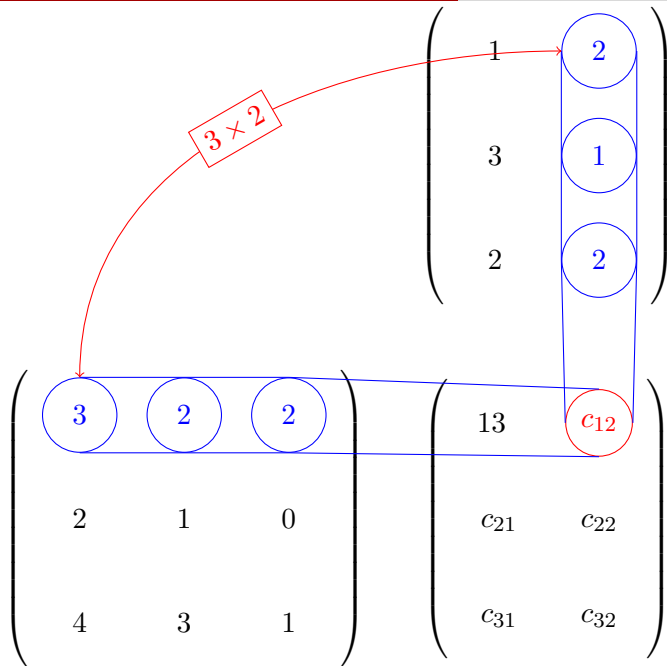
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

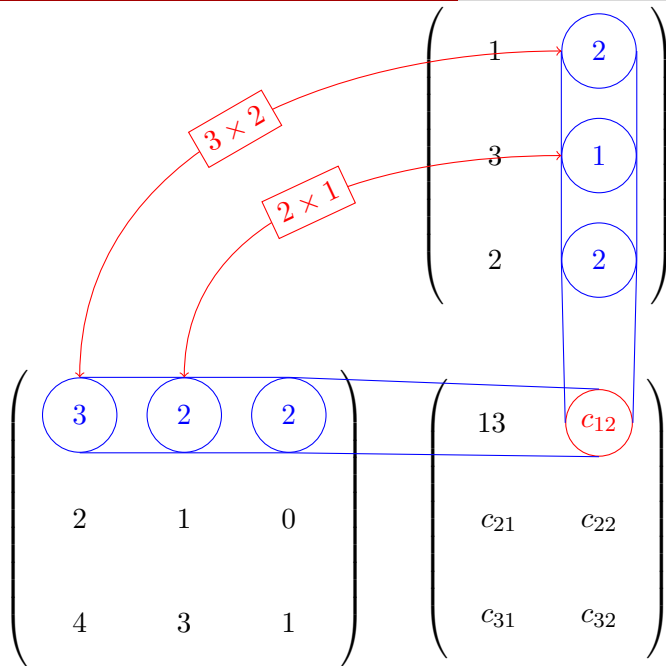
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

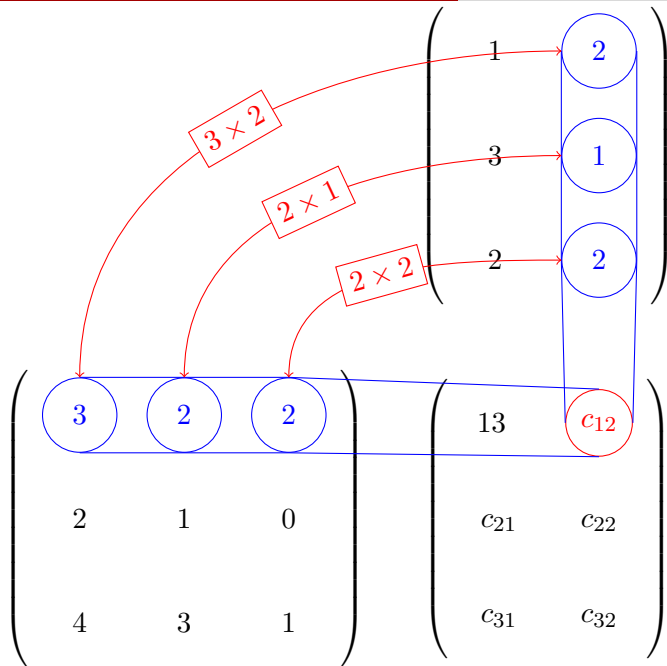
$$\begin{pmatrix} 13 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

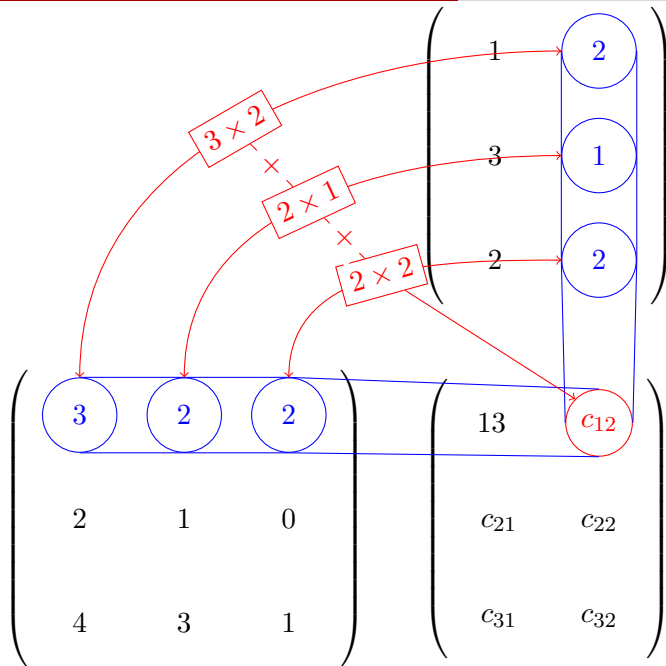
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

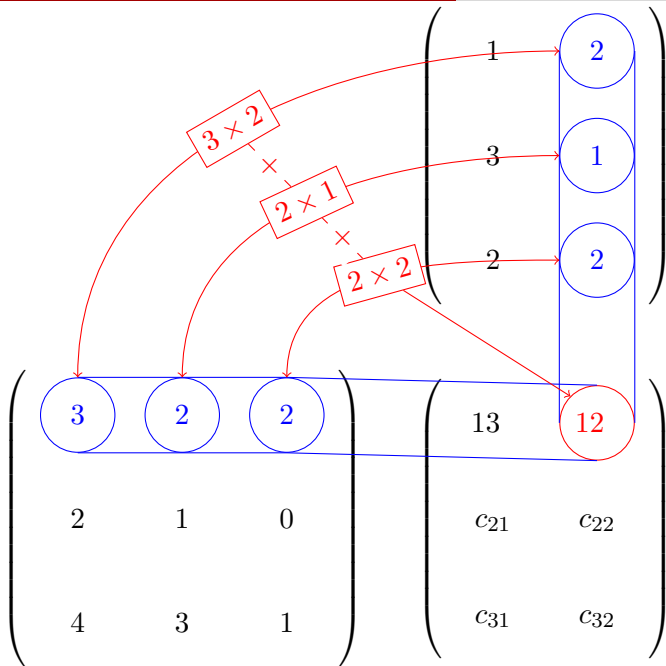
Diagram illustrating matrix multiplication. The first matrix is $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ and the second matrix is $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. The result matrix is $\begin{pmatrix} 13 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$. Blue circles highlight the elements 3, 2, 2 in the first row of the first matrix and 2, 1, 2 in the second column of the second matrix. Blue lines connect these elements to the element c_{12} in the result matrix, which is highlighted with a red circle. The value 13 is also highlighted with a red circle.











$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

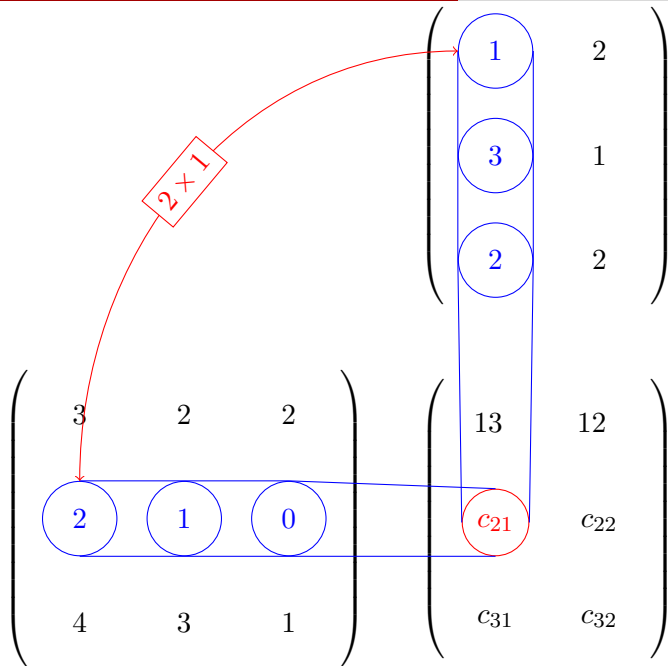
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

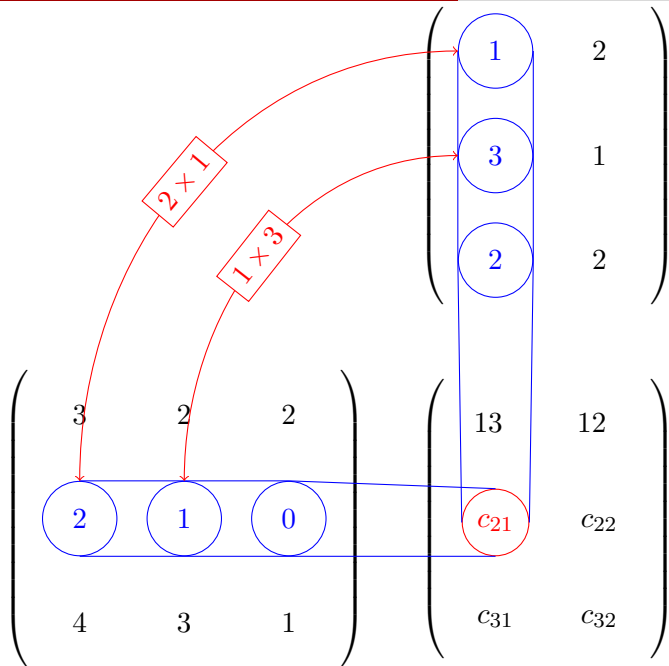
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

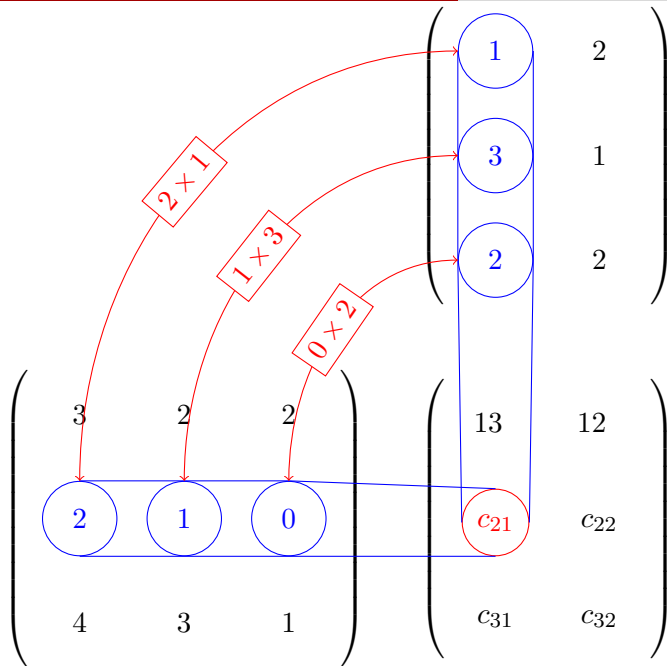
$$\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

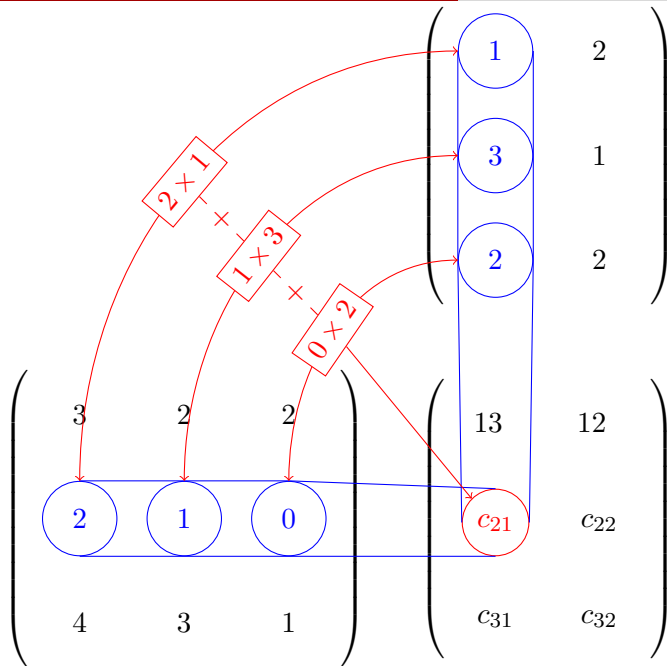
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

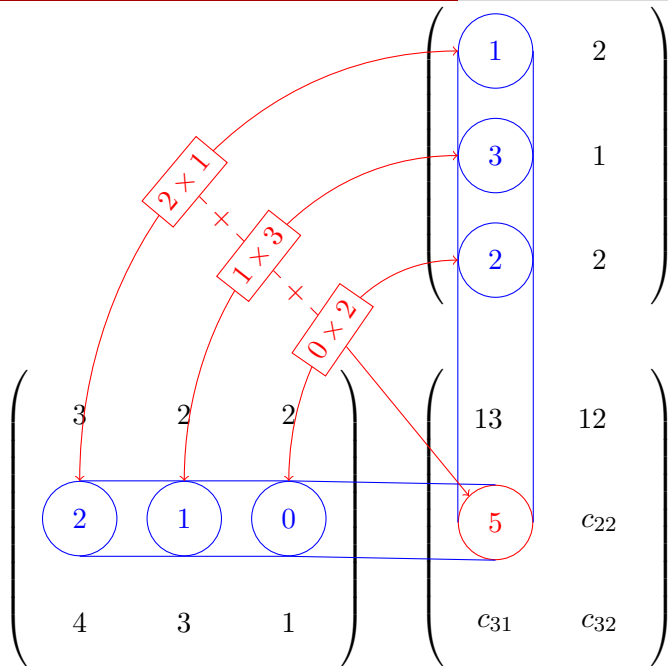
Diagram illustrating matrix multiplication. The first matrix is $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ and the second matrix is $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. The element c_{21} in the resulting matrix is highlighted in red, and blue circles and lines indicate the calculation path: the second row of the first matrix (2, 1, 0) and the third column of the second matrix (1, 2, 2) are circled, and lines connect them to the c_{21} position.











$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

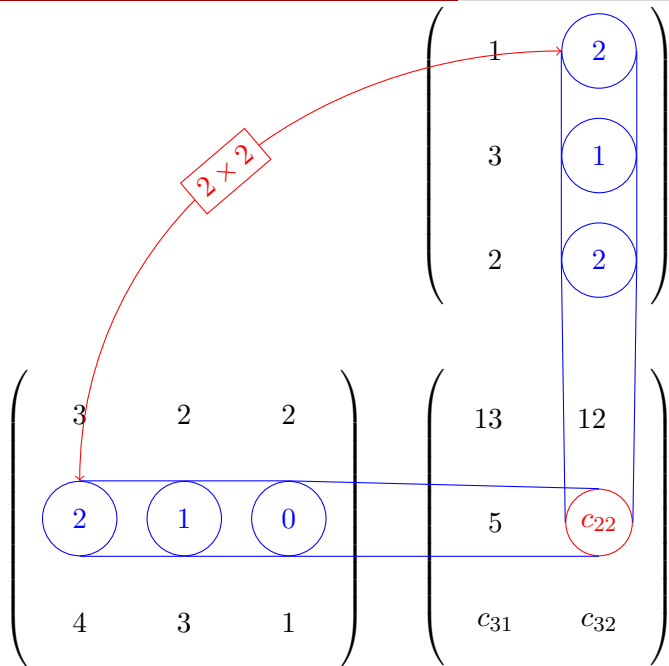
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

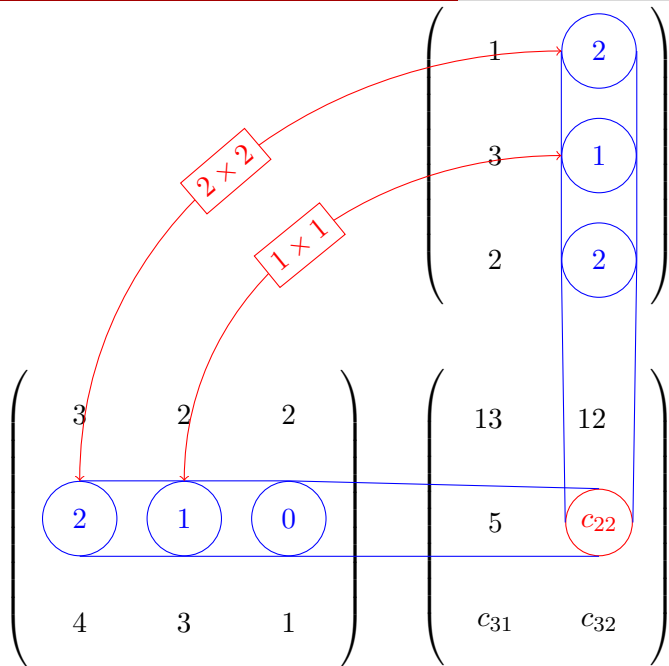
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

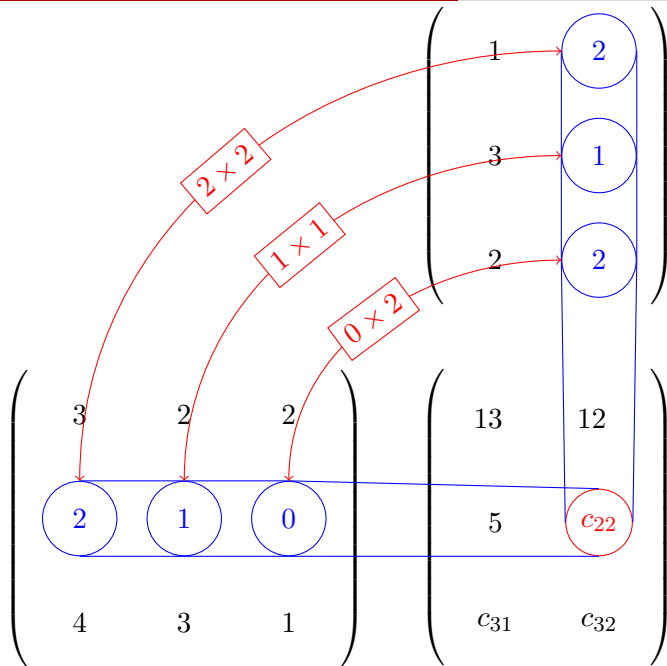
$$\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

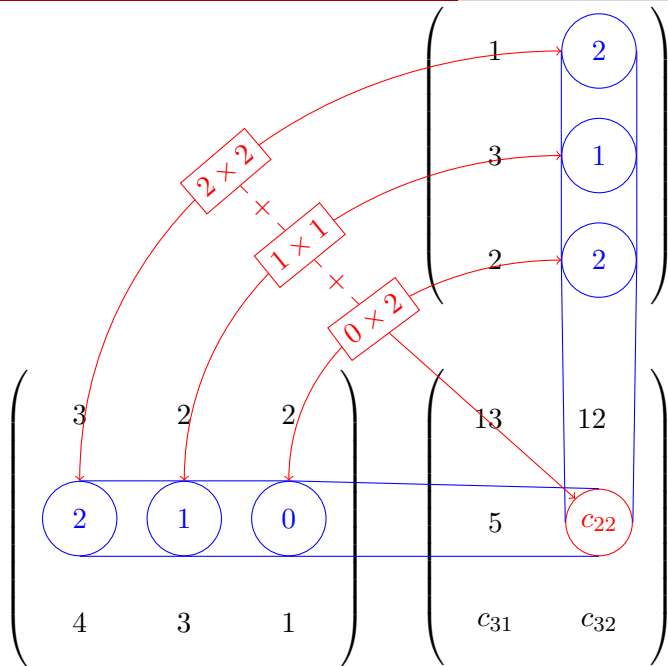
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

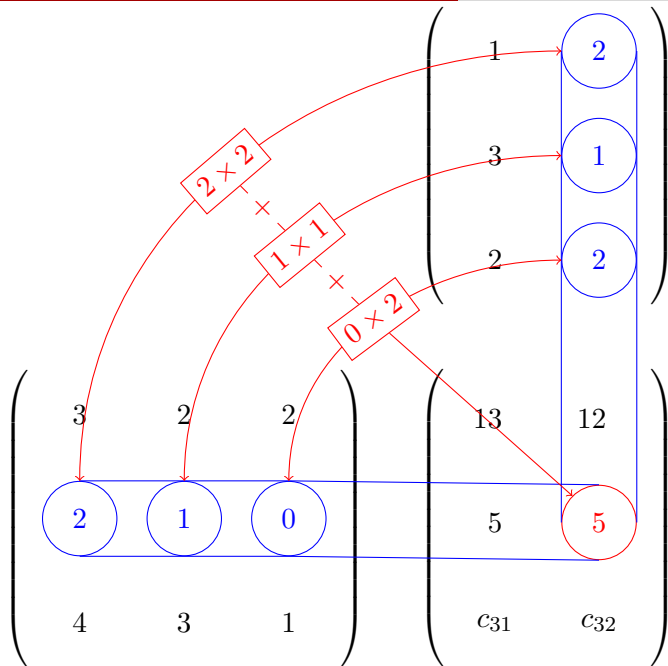
Diagram illustrating the calculation of the element c_{22} in the product matrix. The element c_{22} is the dot product of the second row of the first matrix and the second column of the second matrix. The elements involved are circled in blue: the 2 in the second row, first column of the first matrix; the 1 in the second row, second column of the first matrix; the 0 in the second row, third column of the first matrix; the 2 in the first row, second column of the second matrix; the 1 in the second row, second column of the second matrix; and the 2 in the third row, second column of the second matrix. The result c_{22} is circled in red.











$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

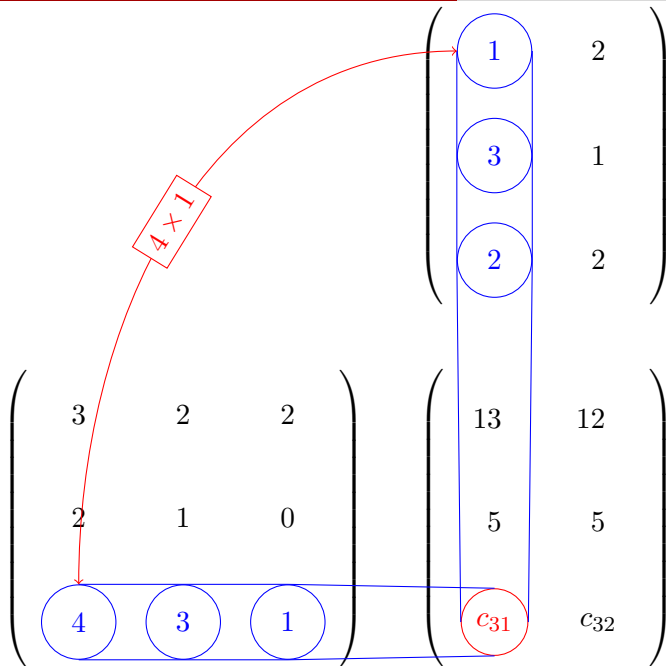
$$\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

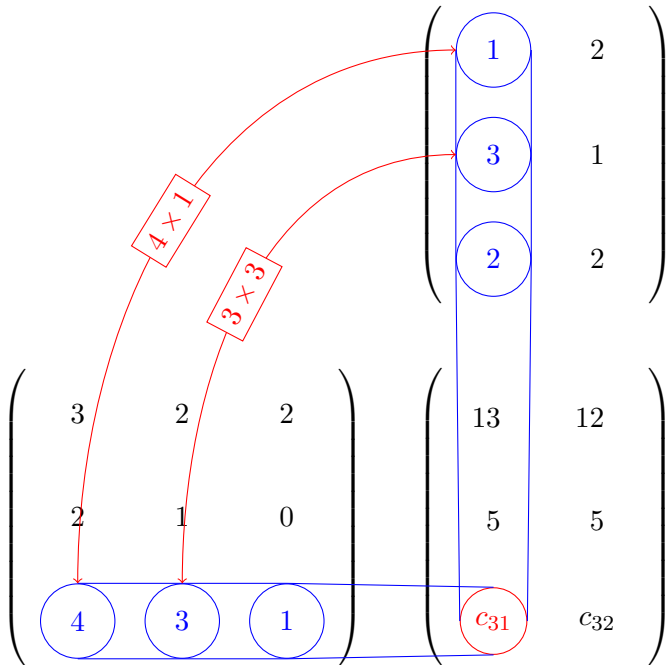
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

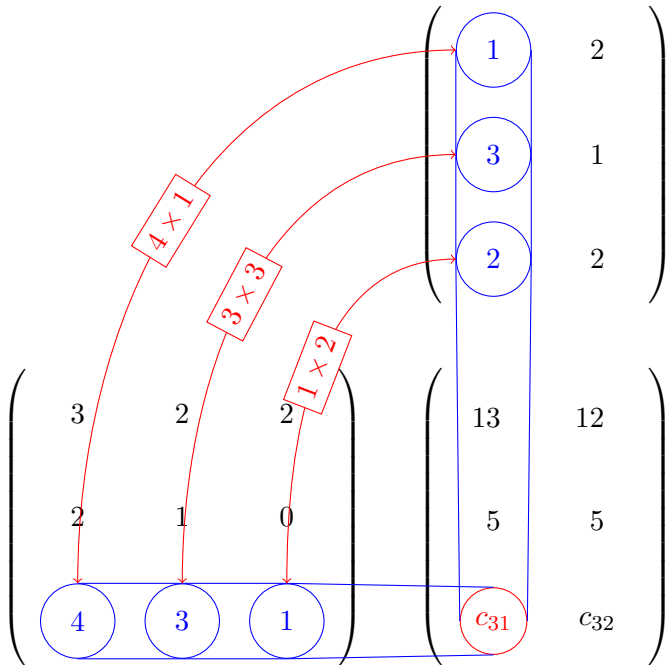
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

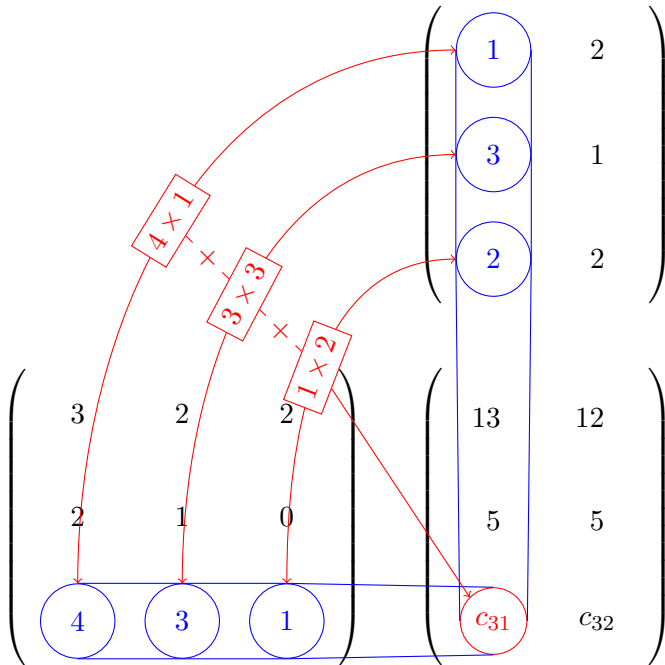
$$\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

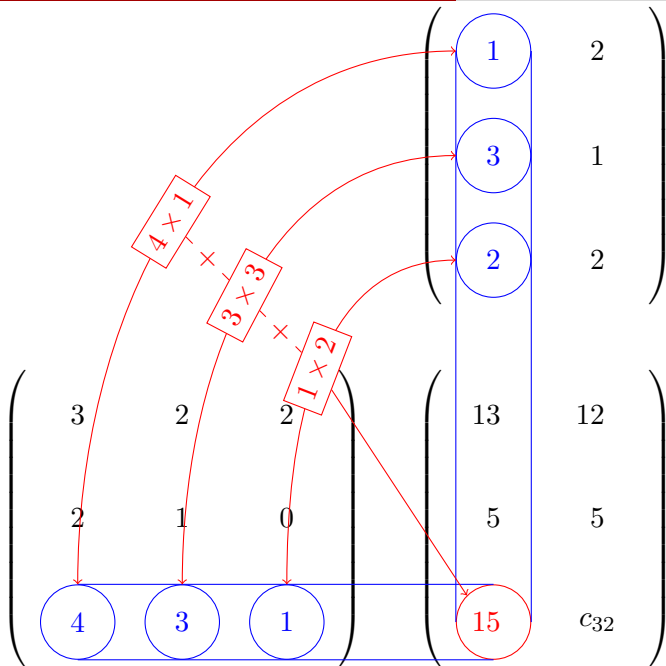
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$











$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

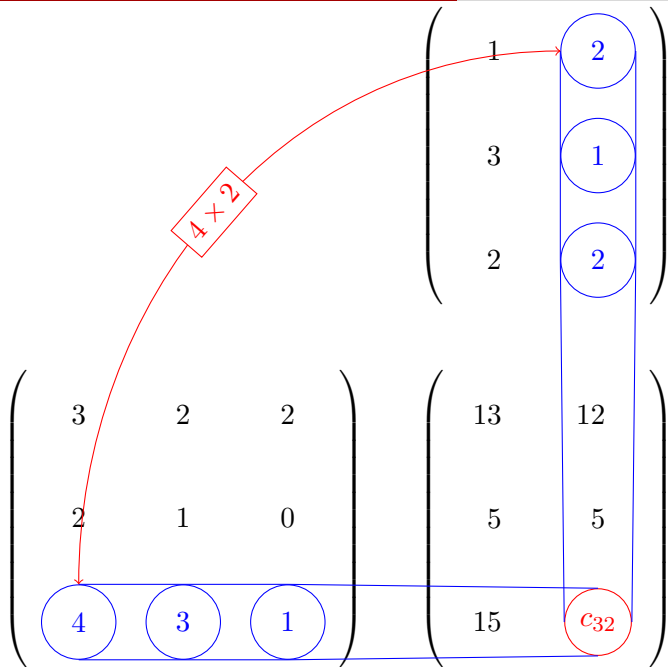
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

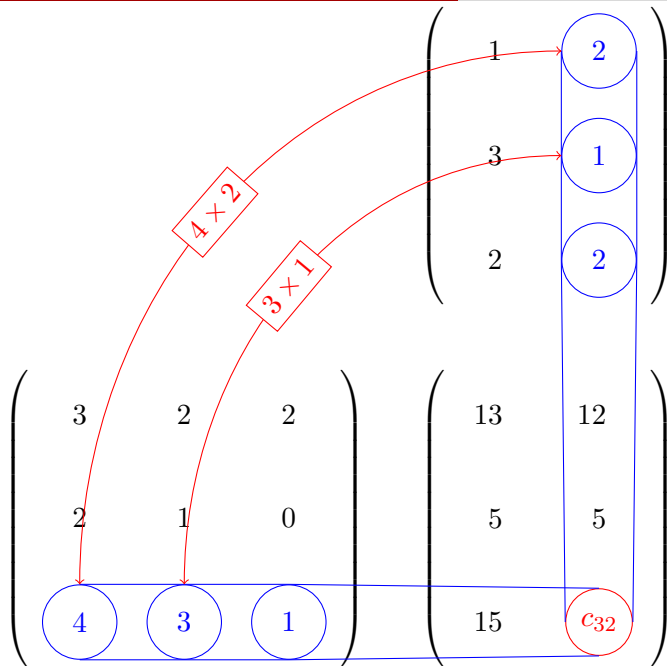
$$\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ 15 & c_{32} \end{pmatrix}$$

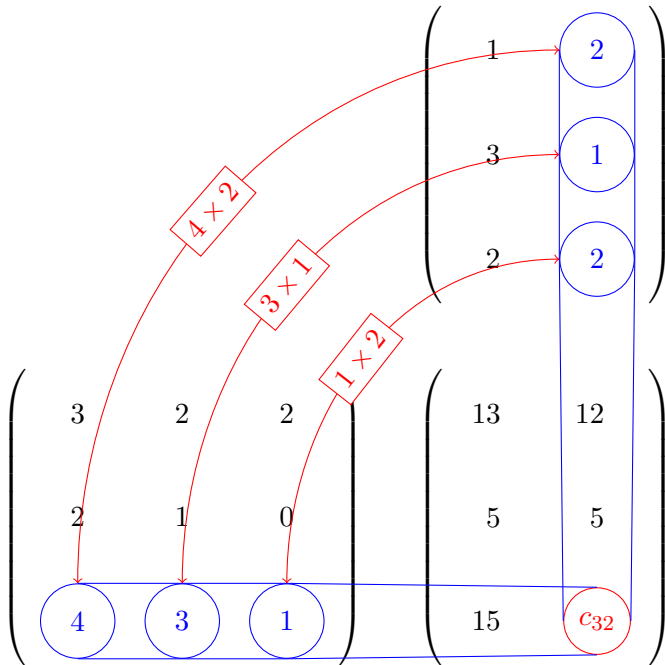
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

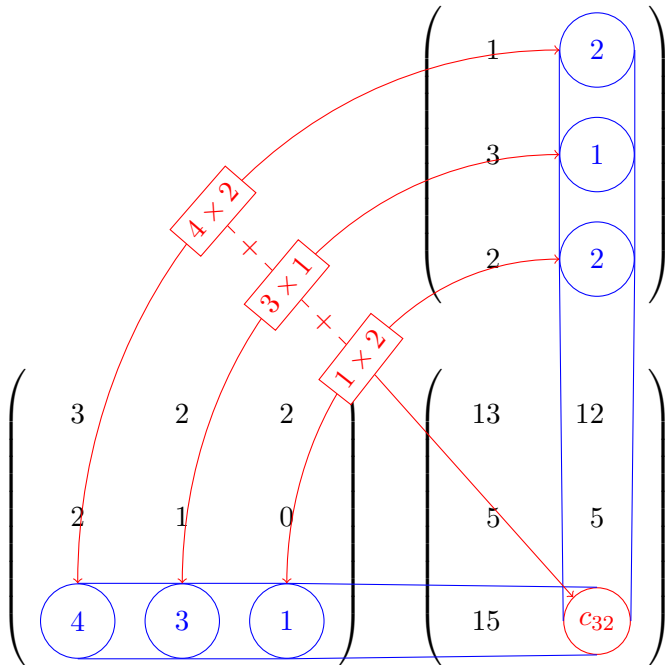
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ 15 & c_{32} \end{pmatrix}$$

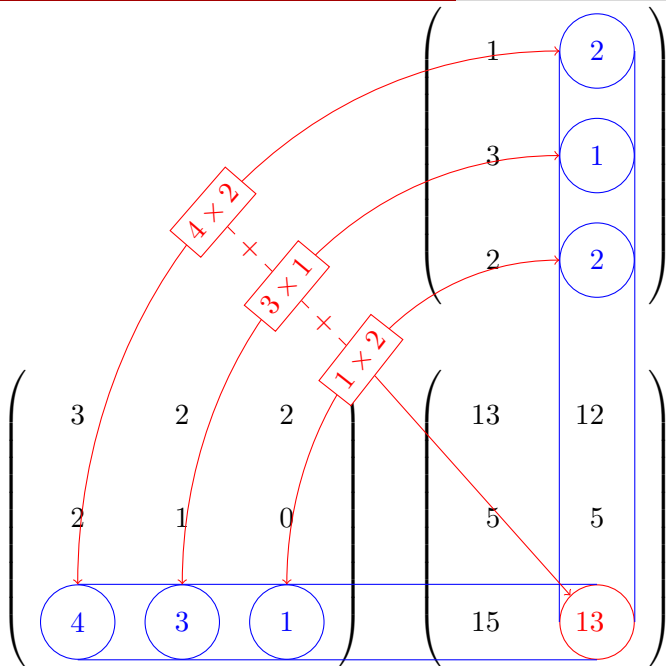
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ 15 & c_{32} \end{pmatrix}$$











$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ 15 & 13 \end{pmatrix}$$

矩阵乘积与线性方程组

- 线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- 则线性方程组可表示为 $AX = \beta$ 。称 A 为线性方程组的系数矩阵。

矩阵乘积与线性方程组

- 线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- 则线性方程组可表示为 $AX = \beta$ 。称 A 为线性方程组的系数矩阵。

矩阵乘积与线性方程组

- 线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- 则线性方程组可表示为 $AX = \beta$ 。称 A 为线性方程组的系数矩阵。

矩阵乘积与线性方程组

- 线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- 则线性方程组可表示为 $AX = \beta$ 。称 A 为线性方程组的系数矩阵。

Outline

- ① 矩阵的定义
- ② 矩阵乘法
- ③ 矩阵乘法的性质
- ④ 矩阵的其它常用运算

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

求 AB 。

例

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA .

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA .

例

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA .

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA .

例

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA .

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA .

例

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA .

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA .

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
 - $A_{2 \times 1}, B_{1 \times 3}$, AB 为 2×3 的矩阵, 但 BA 无意义。
 - $A_{3 \times 1}, B_{1 \times 3}$, AB 和 BA 均有意义, 但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
 - 若 A, B 均为 n 阶方阵, AB 和 BA 也均为 n 阶方阵, 但仍有可能 $AB \neq BA$ 。
- 若 $AB = BA$, 则称矩阵 A, B 乘积可交换, 或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
 - ① $A_{2 \times 1}$, $B_{1 \times 3}$, AB 为 2×3 的矩阵, 但 BA 无意义。
 - ② $A_{3 \times 1}$, $B_{1 \times 3}$, AB 和 BA 均有意义, 但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
 - ③ 若 A 、 B 均为 n 阶方阵, AB 和 BA 也均为 n 阶方阵, 但仍有可能 $AB \neq BA$ 。
- 若 $AB = BA$, 则称矩阵 A 、 B 乘积可交换, 或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
 - ① $A_{2 \times 1}$, $B_{1 \times 3}$, AB 为 2×3 的矩阵, 但 BA 无意义。
 - ② $A_{3 \times 1}$, $B_{1 \times 3}$, AB 和 BA 均有意义, 但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
 - ③ 若 A 、 B 均为 n 阶方阵, AB 和 BA 也均为 n 阶方阵, 但仍有可能 $AB \neq BA$ 。
- 若 $AB = BA$, 则称矩阵 A 、 B 乘积可交换, 或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
 - ① $A_{2 \times 1}$, $B_{1 \times 3}$, AB 为 2×3 的矩阵, 但 BA 无意义。
 - ② $A_{3 \times 1}$, $B_{1 \times 3}$, AB 和 BA 均有意义, 但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
 - ③ 若 A 、 B 均为 n 阶方阵, AB 和 BA 也均为 n 阶方阵, 但仍有可能 $AB \neq BA$ 。
- 若 $AB = BA$, 则称矩阵 A 、 B 乘积可交换, 或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
 - ① $A_{2 \times 1}$, $B_{1 \times 3}$, AB 为 2×3 的矩阵, 但 BA 无意义。
 - ② $A_{3 \times 1}$, $B_{1 \times 3}$, AB 和 BA 均有意义, 但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
 - ③ 若 A 、 B 均为 n 阶方阵, AB 和 BA 也均为 n 阶方阵, 但仍有可能 $AB \neq BA$ 。
- 若 $AB = BA$, 则称矩阵 A 、 B 乘积可交换, 或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
 - ① $A_{2 \times 1}$, $B_{1 \times 3}$, AB 为 2×3 的矩阵, 但 BA 无意义。
 - ② $A_{3 \times 1}$, $B_{1 \times 3}$, AB 和 BA 均有意义, 但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
 - ③ 若 A 、 B 均为 n 阶方阵, AB 和 BA 也均为 n 阶方阵, 但仍有可能 $AB \neq BA$ 。
- 若 $AB = BA$, 则称矩阵 A 、 B 乘积可交换, 或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
 - ① $A_{2 \times 1}$, $B_{1 \times 3}$, AB 为 2×3 的矩阵, 但 BA 无意义。
 - ② $A_{3 \times 1}$, $B_{1 \times 3}$, AB 和 BA 均有意义, 但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
 - ③ 若 A 、 B 均为 n 阶方阵, AB 和 BA 也均为 n 阶方阵, 但仍有可能 $AB \neq BA$ 。
- 若 $AB = BA$, 则称矩阵 A 、 B 乘积可交换, 或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵。

单位矩阵与可换性

定义 3.1

称所有对角元都为 1、非对角元都为 0 的 n 阶方阵为 n 阶单位矩阵，记作 E_n (或 I_n)，即

$$E_n (= I_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 设 B 是任意的一个 n 阶方阵，则可以验证 E_n 与 B 可交换，且

$$E_n B = B E_n = B.$$

单位矩阵与可换性

定义 3.1

称所有对角元都为 1、非对角元都为 0 的 n 阶方阵为 n 阶单位矩阵，记作 E_n (或 I_n)，即

$$E_n (= I_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 设 B 是任意的一个 n 阶方阵，则可以验证 E_n 与 B 可交换，且

$$E_n B = B E_n = B.$$

对角阵与矩阵乘法

- 所有非对角元都为 0 的方阵称为**对角矩阵**。

- $\text{diag}(d_1, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$

对角阵与矩阵乘法

- 所有非对角元都为 0 的方阵称为**对角矩阵**。

- $\text{diag}(d_1, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$

对角阵与矩阵乘法

例 1

设 $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ 是一个对角矩阵, $B = (b_{ij})_{n \times k}$ 和 $C = (c_{ij})_{m \times n}$ 是两个一般的矩阵。则

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \cdots & a_1 b_{1k} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_2 b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \cdots & a_n b_{nk} \end{pmatrix},$$

$$CA = \begin{pmatrix} a_1 c_{11} & a_2 c_{12} & \cdots & a_n c_{1n} \\ a_1 c_{21} & a_2 c_{22} & \cdots & a_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 c_{m1} & a_2 c_{m2} & \cdots & a_n c_{mn} \end{pmatrix}.$$

三角阵与矩阵乘法

- 上三角矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = 0, \quad \forall i > j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

- 下三角矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = 0, \quad \forall i < j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

- 严格上(下)三角矩阵 — 对角元都为 0 的上(下)三角矩阵。

三角阵与矩阵乘法

- 上三角矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = 0, \quad \forall i > j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

- 下三角矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = 0, \quad \forall i < j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

- 严格上(下)三角矩阵 — 对角元都为 0 的上(下)三角矩阵。

三角阵与矩阵乘法

- 上三角矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = 0, \quad \forall i > j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

- 下三角矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = 0, \quad \forall i < j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

- 严格上(下)三角矩阵 — 对角元都为 0 的上(下)三角矩阵。

三角阵与矩阵乘法

命题 3.1

- ① 设 A 和 B 是同阶上三角矩阵，则 AB 也是上三角矩阵。
- ② 设 A 和 B 是同阶下三角矩阵，则 AB 也是下三角矩阵。
- ③ 设 A 和 B 是同阶对角矩阵，则 AB 也是对角矩阵。

三角阵与矩阵乘法

命题 3.1

- ① 设 A 和 B 是同阶上三角矩阵, 则 AB 也是上三角矩阵。
- ② 设 A 和 B 是同阶下三角矩阵, 则 AB 也是下三角矩阵。
- ③ 设 A 和 B 是同阶对角矩阵, 则 AB 也是对角矩阵。

三角阵与矩阵乘法

命题 3.1

- ① 设 A 和 B 是同阶上三角矩阵, 则 AB 也是上三角矩阵。
- ② 设 A 和 B 是同阶下三角矩阵, 则 AB 也是下三角矩阵。
- ③ 设 A 和 B 是同阶对角矩阵, 则 AB 也是对角矩阵。

三角阵与矩阵乘法

命题 3.1

- ① 设 A 和 B 是同阶上三角矩阵，则 AB 也是上三角矩阵。
- ② 设 A 和 B 是同阶下三角矩阵，则 AB 也是下三角矩阵。
- ③ 设 A 和 B 是同阶对角矩阵，则 AB 也是对角矩阵。

零矩阵与矩阵乘法

- 所有元素都是 0 的矩阵称为**零矩阵**；
- $m \times n$ 阶零矩阵常被记作 $0_{m \times n}$ ，当阶数已知或不重要时，零矩阵也常用 0 直接表示。
- 零矩阵与任意其它可乘矩阵相乘均为零矩阵。

零矩阵与矩阵乘法

- 所有元素都是 0 的矩阵称为**零矩阵**；
- $m \times n$ 阶零矩阵常被记作 $0_{m \times n}$ ，当阶数已知或不重要时，零矩阵也常用 0 直接表示。
- 零矩阵与任意其它可乘矩阵相乘均为零矩阵。

零矩阵与矩阵乘法

- 所有元素都是 0 的矩阵称为**零矩阵**；
- $m \times n$ 阶零矩阵常被记作 $0_{m \times n}$ ，当阶数已知或不重要时，零矩阵也常用 0 直接表示。
- 零矩阵与任意其它可乘矩阵相乘均为零矩阵。

消去律不成立

特别提示

矩阵乘积不满足消去律。即

$$A \neq 0, AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

• $AB = 0$ 且 $A \neq 0 \not\Rightarrow B = 0$ 。

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = 0$, 但 $A \neq 0$, 且 $B \neq 0$ 。

消去律不成立

特别提示

矩阵乘积不满足消去律。即

$$A \neq 0, AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

• $AB = 0$ 且 $A \neq 0 \not\Rightarrow B = 0$ 。

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = 0$, 但 $A \neq 0$, 且 $B \neq 0$ 。

消去律不成立

特别提示

矩阵乘积不满足消去律。即

$$A \neq 0, AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

• $AB = 0$ 且 $A \neq 0 \not\Rightarrow B = 0$ 。

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = 0$, 但 $A \neq 0$, 且 $B \neq 0$ 。

消去律不成立

特别提示

矩阵乘积不满足消去律。即

$$A \neq 0, AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

• $AB = 0$ 且 $A \neq 0 \not\Rightarrow B = 0$ 。

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = 0$, 但 $A \neq 0$, 且 $B \neq 0$ 。

消去律不成立

特别提示

矩阵乘积不满足消去律。即

$$A \neq 0, AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

• $AB = 0$ 且 $A \neq 0 \not\Rightarrow B = 0$ 。

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = 0$, 但 $A \neq 0$, 且 $B \neq 0$ 。

消去律不成立

特别提示

矩阵乘积不满足消去律。即

$$A \neq 0, AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

• $AB = 0$ 且 $A \neq 0 \not\Rightarrow B = 0$ 。

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = 0$, 但 $A \neq 0$, 且 $B \neq 0$ 。

乘法的“正常”性质

命题 3.2

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 、 $B = (b_{ij})_{n \times k}$ 、 $C = (c_{ij})_{k \times p}$ ，则

$$(AB)C = A(BC).$$

乘法次序对运算量的影响

例 2

取 $A = (1, 2, 3, 4, 5)$ 、 $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ ，分别按照 $ABA = (AB)A$ 和 $ABA = A(BA)$ 两个公式计算 ABA ，并比较两者在运算量上的差异。

Outline

- 1 矩阵的定义
- 2 矩阵乘法
- 3 矩阵乘法的性质
- 4 矩阵的其它常用运算

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m \times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m \times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m \times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m \times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m \times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m \times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m \times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵加法的运算规则

运算规则：

- 交换律： $A + B = B + A$ ；
- 结合律： $(A + B) + C = A + (B + C)$ ；
- 存在零元： $0 + A = A + 0 = A$ ；
- 存在负元： $A + (-A) = 0$ ；

负元

$$-A := 0 - A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

- 加减法关系： $A - B = A + (-B)$ 。
- 乘法和加法： $A(B + C) = AB + AC$ ， $(A + B)C = AC + BC$ 。

矩阵加法的运算规则

运算规则：

- 交换律： $A + B = B + A$ ；
- 结合律： $(A + B) + C = A + (B + C)$ ；
- 存在零元： $0 + A = A + 0 = A$ ；
- 存在负元： $A + (-A) = 0$ ；

负元

$$-A := 0 - A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

- 加减法关系： $A - B = A + (-B)$ 。
- 乘法和加法： $A(B + C) = AB + AC$ ， $(A + B)C = AC + BC$ 。

矩阵加法的运算规则

运算规则：

- 交换律： $A + B = B + A$ ；
- 结合律： $(A + B) + C = A + (B + C)$ ；
- 存在零元： $0 + A = A + 0 = A$ ；
- 存在负元： $A + (-A) = 0$ ；

负元

$$-A := 0 - A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

- 加减法关系： $A - B = A + (-B)$ 。
- 乘法和加法： $A(B + C) = AB + AC$ ， $(A + B)C = AC + BC$ 。

矩阵加法的运算规则

运算规则：

- 交换律： $A + B = B + A$ ；
- 结合律： $(A + B) + C = A + (B + C)$ ；
- 存在零元： $0 + A = A + 0 = A$ ；
- 存在负元： $A + (-A) = 0$ ；

负元

$$-A := 0 - A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

- 加减法关系： $A - B = A + (-B)$ 。
- 乘法和加法： $A(B + C) = AB + AC$ ， $(A + B)C = AC + BC$ 。

矩阵加法的运算规则

运算规则：

- 交换律： $A + B = B + A$ ；
- 结合律： $(A + B) + C = A + (B + C)$ ；
- 存在零元： $0 + A = A + 0 = A$ ；
- 存在负元： $A + (-A) = 0$ ；

负元

$$-A := 0 - A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

- 加减法关系： $A - B = A + (-B)$ 。
- 乘法和加法： $A(B + C) = AB + AC$ ， $(A + B)C = AC + BC$ 。

矩阵加法的运算规则

运算规则：

- 交换律： $A + B = B + A$ ；
- 结合律： $(A + B) + C = A + (B + C)$ ；
- 存在零元： $0 + A = A + 0 = A$ ；
- 存在负元： $A + (-A) = 0$ ；

负元

$$-A := 0 - A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

- 加减法关系： $A - B = A + (-B)$ 。
- 乘法和加法： $A(B + C) = AB + AC$ ， $(A + B)C = AC + BC$ 。

矩阵数乘

定义 4.2

$m \times n$ 阶矩阵与一个数 c 相乘后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为原矩阵对应元素乘以这个数。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad cA = (ca_{ij})_{m \times n},$$

$$c \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘

定义 4.2

$m \times n$ 阶矩阵与一个数 c 相乘后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为原矩阵对应元素乘以这个数。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad cA = (ca_{ij})_{m \times n},$$

$$c \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘

定义 4.2

$m \times n$ 阶矩阵与一个数 c 相乘后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为原矩阵对应元素乘以这个数。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad cA = (ca_{ij})_{m \times n},$$

$$c \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘

定义 4.2

$m \times n$ 阶矩阵与一个数 c 相乘后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为原矩阵对应元素乘以这个数。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad cA = (ca_{ij})_{m \times n},$$

$$c \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘

定义 4.2

$m \times n$ 阶矩阵与一个数 c 相乘后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为原矩阵对应元素乘以这个数。

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad cA = (ca_{ij})_{m \times n},$$

$$c \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘运算规则

- 数乘和加法的协调: $c(A + B) = cA + cB$;
- 数的加法与数乘的协调: $(c + d)A = cA + dA$;
- 数的乘法与数乘的协调: $(cd)A = c(dA)$;
- 数 1 与数乘的协调: $1A = A$;
- 数 0 与数乘的协调: $0A = 0_{m \times n}$;
- 乘法和数乘的协调: $cAB = (cA)B = A(cB)$ 。

矩阵数乘运算规则

- 数乘和加法的协调: $c(A + B) = cA + cB$;
- 数的加法与数乘的协调: $(c + d)A = cA + dA$;
- 数的乘法与数乘的协调: $(cd)A = c(dA)$;
- 数 1 与数乘的协调: $1A = A$;
- 数 0 与数乘的协调: $0A = 0_{m \times n}$;
- 乘法和数乘的协调: $cAB = (cA)B = A(cB)$ 。

矩阵数乘运算规则

- 数乘和加法的协调: $c(A + B) = cA + cB$;
- 数的加法与数乘的协调: $(c + d)A = cA + dA$;
- 数的乘法与数乘的协调: $(cd)A = c(dA)$;
- 数 1 与数乘的协调: $1A = A$;
- 数 0 与数乘的协调: $0A = 0_{m \times n}$;
- 乘法和数乘的协调: $cAB = (cA)B = A(cB)$ 。

矩阵数乘运算规则

- 数乘和加法的协调: $c(A + B) = cA + cB$;
- 数的加法与数乘的协调: $(c + d)A = cA + dA$;
- 数的乘法与数乘的协调: $(cd)A = c(dA)$;
- 数 1 与数乘的协调: $1A = A$;
- 数 0 与数乘的协调: $0A = 0_{m \times n}$;
- 乘法和数乘的协调: $cAB = (cA)B = A(cB)$ 。

矩阵数乘运算规则

- 数乘和加法的协调: $c(A + B) = cA + cB$;
- 数的加法与数乘的协调: $(c + d)A = cA + dA$;
- 数的乘法与数乘的协调: $(cd)A = c(dA)$;
- 数 1 与数乘的协调: $1A = A$;
- 数 0 与数乘的协调: $0A = 0_{m \times n}$;
- 乘法和数乘的协调: $cAB = (cA)B = A(cB)$ 。

矩阵数乘运算规则

- 数乘和加法的协调: $c(A + B) = cA + cB$;
- 数的加法与数乘的协调: $(c + d)A = cA + dA$;
- 数的乘法与数乘的协调: $(cd)A = c(dA)$;
- 数 1 与数乘的协调: $1A = A$;
- 数 0 与数乘的协调: $0A = 0_{m \times n}$;
- 乘法和数乘的协调: $cAB = (cA)B = A(cB)$ 。

矩阵转置

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m} = A^T$$

矩阵转置

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m} = A^T$$

矩阵转置

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m} = A^T$$

矩阵转置

定义 4.3

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$ 。若 $b_{ij} = a_{ji}$ 对 $\forall i, j$ 均成立, 则称 B 是 A 的**转置**, 记作 $B = A^T$ (或 $B = A'$)。

● 转置运算的运算法则:

- $(A^T)^T = A$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(cA)^T = cA^T$;
- $(AB)^T = B^T A^T$;
- $(A_1 A_2 \cdots A_s)^T = A_s^T A_{s-1}^T \cdots A_1^T$ 。

矩阵转置

定义 4.3

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$ 。若 $b_{ij} = a_{ji}$ 对 $\forall i, j$ 均成立, 则称 B 是 A 的**转置**, 记作 $B = A^T$ (或 $B = A'$)。

● 转置运算的运算法则:

- ① $(A^T)^T = A$;
- ② $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- ③ $(cA)^T = cA^T$;
- ④ $(AB)^T = B^T A^T$;
- ⑤ $(A_1 A_2 \cdots A_s)^T = A_s^T A_{s-1}^T \cdots A_1^T$ 。

矩阵转置

定义 4.3

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$ 。若 $b_{ij} = a_{ji}$ 对 $\forall i, j$ 均成立, 则称 B 是 A 的**转置**, 记作 $B = A^T$ (或 $B = A'$)。

● 转置运算的运算法则:

- ① $(A^T)^T = A$;
- ② $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- ③ $(cA)^T = cA^T$;
- ④ $(AB)^T = B^T A^T$;
- ⑤ $(A_1 A_2 \cdots A_s)^T = A_s^T A_{s-1}^T \cdots A_1^T$ 。

矩阵转置

定义 4.3

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$ 。若 $b_{ij} = a_{ji}$ 对 $\forall i, j$ 均成立, 则称 B 是 A 的**转置**, 记作 $B = A^T$ (或 $B = A'$)。

● 转置运算的运算法则:

- ① $(A^T)^T = A$;
- ② $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- ③ $(cA)^T = cA^T$;
- ④ $(AB)^T = B^T A^T$;
- ⑤ $(A_1 A_2 \cdots A_s)^T = A_s^T A_{s-1}^T \cdots A_1^T$ 。

矩阵转置

定义 4.3

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$ 。若 $b_{ij} = a_{ji}$ 对 $\forall i, j$ 均成立, 则称 B 是 A 的**转置**, 记作 $B = A^T$ (或 $B = A'$)。

• 转置运算的运算法则:

- ① $(A^T)^T = A$;
- ② $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- ③ $(cA)^T = cA^T$;
- ④ $(AB)^T = B^T A^T$;
- ⑤ $(A_1 A_2 \cdots A_s)^T = A_s^T A_{s-1}^T \cdots A_1^T$ 。

矩阵转置

定义 4.3

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$ 。若 $b_{ij} = a_{ji}$ 对 $\forall i, j$ 均成立, 则称 B 是 A 的**转置**, 记作 $B = A^T$ (或 $B = A'$)。

• 转置运算的运算法则:

- ① $(A^T)^T = A$;
- ② $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- ③ $(cA)^T = cA^T$;
- ④ $(AB)^T = B^T A^T$;
- ⑤ $(A_1 A_2 \cdots A_s)^T = A_s^T A_{s-1}^T \cdots A_1^T$ 。

矩阵转置

定义 4.3

设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$ 。若 $b_{ij} = a_{ji}$ 对 $\forall i, j$ 均成立, 则称 B 是 A 的**转置**, 记作 $B = A^T$ (或 $B = A'$)。

• 转置运算的运算法则:

- ① $(A^T)^T = A$;
- ② $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- ③ $(cA)^T = cA^T$;
- ④ $(AB)^T = B^T A^T$;
- ⑤ $(A_1 A_2 \cdots A_s)^T = A_s^T A_{s-1}^T \cdots A_1^T$ 。

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$ ，则称 A 为**对称矩阵**；若 $A = -A^T$ ，则称 A 为**反对称矩阵**。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

The diagram shows a square matrix with elements a_{ij} where $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. A blue diagonal line runs from the top-left to the bottom-right. Red arrows point from each element a_{ij} to its corresponding element a_{ji} across the diagonal, illustrating the property $a_{ij} = a_{ji}$.

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$ ，则称 A 为**对称矩阵**；若 $A = -A^T$ ，则称 A 为**反对称矩阵**。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

The diagram shows a matrix with elements a_{ij} where i is the row index and j is the column index. A blue diagonal line runs from the top-left to the bottom-right. Red arrows point from each element a_{ij} to its corresponding element a_{ji} across the diagonal, illustrating the property $a_{ij} = a_{ji}$.

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$ ，则称 A 为**对称矩阵**；若 $A = -A^T$ ，则称 A 为**反对称矩阵**。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

The diagram shows a square matrix with elements a_{ij} where $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. A blue diagonal line runs from the top-left to the bottom-right. Red arrows point from each element a_{ij} to its corresponding element a_{ji} across the diagonal, illustrating the property $a_{ij} = a_{ji}$.

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$ ，则称 A 为**对称矩阵**；若 $A = -A^T$ ，则称 A 为**反对称矩阵**。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

The diagram shows a square matrix with elements a_{ij} where $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. A blue diagonal line runs from the top-left to the bottom-right. Red arrows point from each element a_{ij} to its corresponding element a_{ji} across the diagonal, illustrating the property $a_{ij} = a_{ji}$.

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$ ，则称 A 为**对称矩阵**；若 $A = -A^T$ ，则称 A 为**反对称矩阵**。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

The diagram shows a square matrix with elements a_{ij} where $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. A blue diagonal line runs from the top-left to the bottom-right. Red arrows point from each element a_{ij} to its corresponding element a_{ji} across the diagonal, illustrating the property $a_{ij} = a_{ji}$.

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$, 则称 A 为**对称矩阵**; 若 $A = -A^T$, 则称 A 为**反对称矩阵**。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

The diagram shows a matrix with elements a_{ij} where $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. A blue diagonal line runs from the top-left to the bottom-right. Red arrows point from the diagonal elements to their symmetric counterparts across the diagonal, illustrating that $a_{ij} = a_{ji}$.

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$, 则称 A 为**对称矩阵**; 若 $A = -A^T$, 则称 A 为**反对称矩阵**。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

The diagram shows a matrix with elements a_{ij} where $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. A blue diagonal line runs from the top-left to the bottom-right. Red arrows point from each element a_{ij} to its symmetric counterpart a_{ji} , illustrating that $a_{ij} = a_{ji}$.

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$ ，则称 A 为**对称矩阵**；若 $A = -A^T$ ，则称 A 为**反对称矩阵**。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

The diagram shows a matrix with elements a_{ij} where $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. A blue diagonal line runs from the top-left to the bottom-right. Red arrows point from each element a_{ij} to its corresponding element a_{ji} across the diagonal, illustrating the property $a_{ij} = a_{ji}$.

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$ ，则称 A 为**对称矩阵**；若 $A = -A^T$ ，则称 A 为**反对称矩阵**。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

The diagram shows a square matrix with elements a_{ij} where $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$. A blue diagonal line runs from the top-left to the bottom-right. Red arrows point from each element a_{ij} to its corresponding element a_{ji} across the diagonal, illustrating the property $a_{ij} = a_{ji}$.

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix}
 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A , 存在对称矩阵 B , 反对称矩阵 C , 使得 $A = B + C$ 。

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix}
 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A , 存在对称矩阵 B , 反对称矩阵 C , 使得 $A = B + C$.

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix}
 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A , 存在对称矩阵 B , 反对称矩阵 C , 使得 $A = B + C$.

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix}
 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A , 存在对称矩阵 B , 反对称矩阵 C , 使得 $A = B + C$ 。

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix}
 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A , 存在对称矩阵 B , 反对称矩阵 C , 使得 $A = B + C$ 。

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix}
 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A , 存在对称矩阵 B , 反对称矩阵 C , 使得 $A = B + C$ 。

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix}
 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A , 存在对称矩阵 B , 反对称矩阵 C , 使得 $A = B + C$ 。

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix}
 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A , 存在对称矩阵 B , 反对称矩阵 C , 使得 $A = B + C$ 。

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix}
 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
 -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A , 存在对称矩阵 B , 反对称矩阵 C , 使得 $A = B + C$ 。

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z = a + bi \in \mathbb{C} (a, b \in \mathbb{R})$, 称 $a - bi$ 为 z 的**共轭元**, 记为 \bar{z} 。

定义 4.6

复数域 \mathbb{C} 上矩阵 $A = (a_{jk})_{m \times n}$ 的**共轭矩阵** \bar{A} 定义为 $\bar{A} = (\bar{a}_{jk})_{m \times n}$ 。

• 运算规则:

- $\overline{(\bar{A})} = A;$
- $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B};$
- $\overline{cA} = \bar{c}\bar{A};$
- $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B};$
- $\overline{(A^T)} = \bar{A}^T。$

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z = a + bi \in \mathbb{C} (a, b \in \mathbb{R})$, 称 $a - bi$ 为 z 的**共轭元**, 记为 \bar{z} 。

定义 4.6

复数域 \mathbb{C} 上矩阵 $A = (a_{jk})_{m \times n}$ 的**共轭矩阵** \bar{A} 定义为 $\bar{A} = (\bar{a}_{jk})_{m \times n}$ 。

• 运算规则:

- $\overline{(\bar{A})} = A;$
- $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B};$
- $\overline{cA} = \bar{c}\bar{A};$
- $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B};$
- $\overline{(A^T)} = \bar{A}^T.$

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z = a + bi \in \mathbb{C} (a, b \in \mathbb{R})$, 称 $a - bi$ 为 z 的**共轭元**, 记为 \bar{z} 。

定义 4.6

复数域 \mathbb{C} 上矩阵 $A = (a_{jk})_{m \times n}$ 的**共轭矩阵** \bar{A} 定义为 $\bar{A} = (\bar{a}_{jk})_{m \times n}$ 。

• 运算规则:

- ① $\overline{(\bar{A})} = A;$
- ② $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B};$
- ③ $\overline{cA} = \bar{c}\bar{A};$
- ④ $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B};$
- ⑤ $\overline{(A^T)} = \bar{A}^T。$

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z = a + bi \in \mathbb{C} (a, b \in \mathbb{R})$, 称 $a - bi$ 为 z 的**共轭元**, 记为 \bar{z} 。

定义 4.6

复数域 \mathbb{C} 上矩阵 $A = (a_{jk})_{m \times n}$ 的**共轭矩阵** \bar{A} 定义为 $\bar{A} = (\bar{a}_{jk})_{m \times n}$ 。

• 运算规则:

- ① $\overline{(\bar{A})} = A$;
- ② $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$;
- ③ $\overline{cA} = \bar{c}\bar{A}$;
- ④ $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$;
- ⑤ $\overline{(A^T)} = \bar{A}^T$ 。

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z = a + bi \in \mathbb{C} (a, b \in \mathbb{R})$, 称 $a - bi$ 为 z 的**共轭元**, 记为 \bar{z} 。

定义 4.6

复数域 \mathbb{C} 上矩阵 $A = (a_{jk})_{m \times n}$ 的**共轭矩阵** \bar{A} 定义为 $\bar{A} = (\bar{a}_{jk})_{m \times n}$ 。

• 运算规则:

- ① $\overline{(\bar{A})} = A;$
- ② $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B};$
- ③ $\overline{cA} = \bar{c}\bar{A};$
- ④ $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B};$
- ⑤ $\overline{(A^T)} = \bar{A}^T。$

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z = a + bi \in \mathbb{C} (a, b \in \mathbb{R})$, 称 $a - bi$ 为 z 的**共轭元**, 记为 \bar{z} 。

定义 4.6

复数域 \mathbb{C} 上矩阵 $A = (a_{jk})_{m \times n}$ 的**共轭矩阵** \bar{A} 定义为 $\bar{A} = (\bar{a}_{jk})_{m \times n}$ 。

• 运算规则:

- ① $\overline{(\bar{A})} = A$;
- ② $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$;
- ③ $\overline{cA} = \bar{c}\bar{A}$;
- ④ $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$;
- ⑤ $\overline{(A^T)} = \bar{A}^T$ 。

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z = a + bi \in \mathbb{C} (a, b \in \mathbb{R})$, 称 $a - bi$ 为 z 的**共轭元**, 记为 \bar{z} 。

定义 4.6

复数域 \mathbb{C} 上矩阵 $A = (a_{jk})_{m \times n}$ 的**共轭矩阵** \bar{A} 定义为 $\bar{A} = (\bar{a}_{jk})_{m \times n}$ 。

• 运算规则:

- ① $\overline{(\bar{A})} = A$;
- ② $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$;
- ③ $\overline{cA} = \bar{c}\bar{A}$;
- ④ $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$;
- ⑤ $\overline{(A^T)} = \bar{A}^T$ 。

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z = a + bi \in \mathbb{C} (a, b \in \mathbb{R})$, 称 $a - bi$ 为 z 的**共轭元**, 记为 \bar{z} 。

定义 4.6

复数域 \mathbb{C} 上矩阵 $A = (a_{jk})_{m \times n}$ 的**共轭矩阵** \bar{A} 定义为 $\bar{A} = (\bar{a}_{jk})_{m \times n}$ 。

• 运算规则:

- ① $\overline{(\bar{A})} = A$;
- ② $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$;
- ③ $\overline{cA} = \bar{c}\bar{A}$;
- ④ $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$;
- ⑤ $\overline{(A^T)} = \bar{A}^T$ 。

方阵的幂

定义 4.7

设 A 是一个方阵，定义**方阵的幂**：

$$A^2 := A \times A; \cdots; A^r := A^{r-1} \times A = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_r$$

- $A^r \times A^s = A^{r+s}$;
- $(A^r)^s = A^{rs}$;
- 若 $AB = BA$ ，则 $(AB)^s = A^s B^s$ 。
- 若 $AB = BA$ ，则

$$(A + B)^s = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} A^{s-i} B^i$$

方阵的幂

定义 4.7

设 A 是一个方阵，定义**方阵的幂**：

$$A^2 := A \times A; \cdots; A^r := A^{r-1} \times A = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_r$$

- $A^r \times A^s = A^{r+s}$;
- $(A^r)^s = A^{rs}$;
- 若 $AB = BA$ ，则 $(AB)^s = A^s B^s$ 。
- 若 $AB = BA$ ，则

$$(A + B)^s = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} A^{s-i} B^i$$

方阵的幂

定义 4.7

设 A 是一个方阵，定义**方阵的幂**：

$$A^2 := A \times A; \cdots; A^r := A^{r-1} \times A = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_r$$

- $A^r \times A^s = A^{r+s}$;
- $(A^r)^s = A^{rs}$;
- 若 $AB = BA$ ，则 $(AB)^s = A^s B^s$ 。
- 若 $AB = BA$ ，则

$$(A + B)^s = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} A^{s-i} B^i$$

方阵的幂

定义 4.7

设 A 是一个方阵，定义**方阵的幂**：

$$A^2 := A \times A; \cdots; A^r := A^{r-1} \times A = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_r$$

- $A^r \times A^s = A^{r+s}$;
- $(A^r)^s = A^{rs}$;
- 若 $AB = BA$ ，则 $(AB)^s = A^s B^s$ 。
- 若 $AB = BA$ ，则

$$(A + B)^s = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} A^{s-i} B^i$$

方阵的幂

定义 4.7

设 A 是一个方阵，定义**方阵的幂**：

$$A^2 := A \times A; \cdots; A^r := A^{r-1} \times A = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_r$$

- $A^r \times A^s = A^{r+s}$;
- $(A^r)^s = A^{rs}$;
- 若 $AB = BA$ ，则 $(AB)^s = A^s B^s$ 。
- 若 $AB = BA$ ，则

$$(A + B)^s = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} A^{s-i} B^i$$

例

例 4.1

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^2 。

例 4.2

设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 B^2, B^3 。

例

例 4.1

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^2 。

例 4.2

设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 B^2 , B^3 。

例

例 4.3

一般的, 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$, 求 A^k 。

例

例 4.4

设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

求 A^n 。

例 4.5

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

求 A^{2025} 。

例

例 4.4

设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

求 A^n 。

例 4.5

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

求 A^{2025} 。