$ 2.2 矩阵及其运算

高等代数 https://gdfzu.club

Outline

Outline

数域 $\mathbb{F}$ 上线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

其中 $x_i\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ 是**未知量**，

$a_{ij},\ b_i \in \mathbb{F}\ (i = 1,\ 2,\ \ldots m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} $(i=1,\ 2,\ \dots m;\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ 排成 m 行、n 列的矩形阵列:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

称为m 行 n 列矩阵，简称为$m\times n$ 矩阵。

- a_{ij}—A 的第 i 行第 j 列元素或第 $(i,\ j)$ 元素。
- m— 行数，n— 列数。
- 若 $m=n$，则称 A 是一个n 阶方阵。
- a_{ii}—A 的第 i 个(主) 对角元。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} $(i=1,\ 2,\ \dots m;\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ 排成 m 行、n 列的矩形阵列:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

称为m 行 n 列矩阵，简称为$m\times n$ 矩阵。

- a_{ij}—A 的第 i 行第 j 列元素或第 $(i,\ j)$ 元素。
- m— 行数，n— 列数。
- 若 $m=n$，则称 A 是一个n 阶方阵。
- a_{ii}—A 的第 i 个(主) 对角元。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} $(i=1,\ 2,\ \ldots m;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ 排成 m 行、n 列的矩形阵列：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

称为m 行 n 列矩阵，简称为$m\times n$ 矩阵。

- a_{ij}—A 的第 i 行第 j 列元素或第 $(i,\ j)$ 元素。
- m— 行数，n— 列数。
- 若 $m=n$，则称 A 是一个n 阶方阵。
- a_{ii}—A 的第 i 个(主) 对角元。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} $(i=1,\ 2,\ \ldots m;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ 排成 m 行、n 列的矩形阵列：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

称为m 行 n 列矩阵，简称为$m\times n$ 矩阵。

- a_{ij}—A 的第 i 行第 j 列元素或第 $(i,\ j)$ 元素。
- m— 行数，n— 列数。
- 若 $m=n$，则称 A 是一个n 阶方阵。
- a_{ii}—A 的第 i 个(主) 对角元。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} $(i=1,\ 2,\ \ldots m;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ 排成 m 行、n 列的矩形阵列：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

称为m 行 n 列矩阵，简称为$m\times n$ 矩阵。

- a_{ij}—A 的第 i 行第 j 列元素或第 $(i,\ j)$ 元素。
- m— 行数，n— 列数。
- 若 $m=n$，则称 A 是一个n 阶方阵。
- a_{ii}—A 的第 i 个(主) 对角元。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} $(i=1,\ 2,\ \ldots m;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ 排成 m 行、n 列的矩形阵列：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

称为m 行 n 列矩阵，简称为$m\times n$ 矩阵。

- a_{ij}—A 的第 i 行第 j 列元素或第 $(i,\ j)$ 元素。
- m— 行数，n— 列数。
- 若 $m=n$，则称 A 是一个n 阶方阵。
- a_{ii}—A 的第 i 个(主) 对角元。

矩阵定义

定义 1.1

由 mn 个数 a_{ij} $(i=1,\ 2,\ \ldots m;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ 排成 m 行、n 列的矩形阵列：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

称为m 行 n 列矩阵，简称为$m\times n$ 矩阵。

- a_{ij}—A 的第 i 行第 j 列元素或第 $(i,\ j)$ 元素。
- m— 行数，n— 列数。
- 若 $m=n$，则称 A 是一个n 阶方阵。
- a_{ii}—A 的第 i 个(主) 对角元。

特殊矩阵及其元素表示

- 实矩阵 矩阵的元素全为实数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{R}(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

- 复矩阵 矩阵的元素全为复数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{C}(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

- 零矩阵 $0_{m \times n}$ 矩阵的元素全为 0，即

$$a_{ij} = 0(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

- 列数为 1 的矩阵也可称为列矩阵（或列向量）；行数为 1 的矩阵也可称为行矩阵（或行向量）。

特殊矩阵及其元素表示

- 实矩阵 矩阵的元素全为实数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{R}(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

- 复矩阵 矩阵的元素全为复数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{C}(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

- 零矩阵 $0_{m\times n}$ 矩阵的元素全为 0，即

$$a_{ij} = 0(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

- 列数为 1 的矩阵也可称为列矩阵（或列向量)；行数为 1 的矩阵也可称为行矩阵（或行向量)。

特殊矩阵及其元素表示

- 实矩阵 矩阵的元素全为实数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{R}(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

- 复矩阵 矩阵的元素全为复数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{C}(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

- 零矩阵 $0_{m\times n}$ 矩阵的元素全为 0，即

$$a_{ij} = 0(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

- 列数为 1 的矩阵也可称为列矩阵（或列向量）；行数为 1 的矩阵也可称为行矩阵（或行向量）。

特殊矩阵及其元素表示

- 实矩阵 矩阵的元素全为实数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{R}(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

- 复矩阵 矩阵的元素全为复数，即

$$a_{ij} \in \mathbb{C}(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

- 零矩阵 $0_{m\times n}$ 矩阵的元素全为 0，即

$$a_{ij} = 0(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

- 列数为 1 的矩阵也可称为列矩阵（或列向量)；行数为 1 的矩阵也可称为行矩阵（或行向量)。

矩阵的相等

- $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{s\times t}$。则 $A=B$ 必须同时满足如下两个条件：

  1. $m=s$，$n=t$；
  2. $a_{ij}=b_{ij}\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ 2\ldots,\ n$。

- 特别提示：具有不同行列数的零矩阵代表不同的矩阵。如

$$0_{2\times 3}\neq 0_{1\times 6}\neq 0_{3\times 2}$$

矩阵的相等

- $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{s\times t}$。则 $A=B$ 必须同时满足如下两个条件：

  1. $m=s$，$n=t$；
  2. $a_{ij}=b_{ij}\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ 2\ldots,\ n$。

- 特别提示:具有不同行列数的零矩阵代表不同的矩阵。如

$$0_{2\times 3}\neq 0_{1\times 6}\neq 0_{3\times 2}$$

矩阵的相等

- $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{s\times t}$。则 $A=B$ 必须同时满足如下两个条件：

  1. $m=s$，$n=t$；
  2. $a_{ij}=b_{ij}\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ 2\ldots,\ n$。

- 特别提示:具有不同行列数的零矩阵代表不同的矩阵。如

$$0_{2\times 3}\neq 0_{1\times 6}\neq 0_{3\times 2}$$

矩阵的相等

- $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{s\times t}$。则 $A=B$ 必须同时满足如下两个条件：

  1. $m=s$，$n=t$；
  2. $a_{ij}=b_{ij} \quad i=1, 2, \dots, m; j=1, 2\dots, n$。

- 特别提示：具有不同行列数的零矩阵代表不同的矩阵。如

$$0_{2\times 3}\neq 0_{1\times 6}\neq 0_{3\times 2}$$

Outline

矩阵乘法的定义

定义 2.1

设 $A=(a_{ij})_{m\times k}$ 是 $m\times k$ 矩阵，$B=(b_{ij})_{k\times n}$ 是 $k\times n$ 矩阵，则 A 与 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj} \\ &= \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj} \end{aligned}$$

记作 $C=A\times B$，或简记为 $C=AB$。

矩阵乘法的定义

定义 2.1

设 $A=(a_{ij})_{m\times k}$ 是 $m\times k$ 矩阵，$B=(b_{ij})_{k\times n}$ 是 $k\times n$ 矩阵，则 A 与 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj} \\ &= \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj} \end{aligned}$$

记作 $C=A\times B$，或简记为 $C=AB$。

例

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

3×1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3×1

2×3

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3×1

2×3

2×2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&1\\2&2\end{pmatrix}$$

$$3\times 1 + 2\times 3 + 2\times 2$$

$$\begin{pmatrix}3&2&2\\2&1&0\\4&3&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3\times 1 + 2\times 3 + 2\times 2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 13 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

3×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

3×2

2×1

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}13 & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3×2

2×1

2×2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 13 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{3\times 2} \times \boxed{2\times 1} \times \boxed{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3×2

2×1

2×2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}13 & 12\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2×1

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

2×1

1×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2×1 $\quad 1\times 3$ $\quad 0\times 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{2\times 1} + \boxed{1\times 3} + \boxed{0\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2\times1 + 1\times3 + 0\times2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2×2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2×2

1×1

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}
\end{array}$$

2×2

1×1

0×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2\times 2 + 1\times 1 + 0\times 2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2\times 2 + 1\times 1 + 0\times 2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 4\times 1 & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4×1

3×3

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4×1 3×3 1×2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4\times1 + 3\times3 + 1\times2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4\times 1 + 3\times 3 + 1\times 2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ 15 & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ 15 & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ 15 & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ 15 & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4×2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ 15 & c_{32} \end{pmatrix}$$

4×2

3×1

$$\begin{pmatrix}3&2&2\\2&1&0\\4&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&12\\5&5\\15&c_{32}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4×2

3×1

1×2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ 15 & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$4\times 2+3\times 1+1\times 2$$

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}13 & 12\\ 5 & 5\\ 15 & c_{32}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$4\times 2 + 3\times 1 + 1\times 2$$

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}13 & 12\\ 5 & 5\\ 15 & 13\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 5 & 5 \\ 15 & 13 \end{pmatrix}$$

矩阵乘积与线性方程组

- 线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$
- 则线性方程组可表示为$AX = \beta$。称 A 为线性方程组的系数矩阵。

矩阵乘积与线性方程组

- **线性方程组的一般形式**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$
- 则线性方程组可表示为$AX = \beta$。称 A 为线性方程组的系数矩阵。

矩阵乘积与线性方程组

- 线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$
- 则线性方程组可表示为$AX = \beta$。称 A 为线性方程组的系数矩阵。

矩阵乘积与线性方程组

- 线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$
- 则线性方程组可表示为$AX = \beta$。称 A 为线性方程组的系数矩阵。

Outline

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

求 AB。

例

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，求 AB，BA。

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 AB，BA。

例

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，求 AB，BA。

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 AB，BA。

例

- $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，求 AB，BA。

- $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$，求 AB，BA。

例

- $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，求 AB，BA。

- $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$，求 AB，BA。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
  1. $A_{2\times1}$，$B_{1\times3}$，AB 为 2×3 的矩阵，但 BA 无意义。
  2. $A_{3\times1}$，$B_{1\times3}$，AB 和 BA 均有意义，但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
  3. 若 A、B 均为 n 阶方阵，AB 和 BA 也均为 n 阶方阵，但仍有可能 $AB\neq BA$。
- 若 $AB=BA$，则称矩阵 A、B 乘积可交换，或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
  1. $A_{2\times 1}$，$B_{1\times 3}$，AB 为 2×3 的矩阵，但 BA 无意义。
  2. $A_{3\times 1}$，$B_{1\times 3}$，AB 和 BA 均有意义，但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
  3. 若 A、B 均为 n 阶方阵，AB 和 BA 也均为 n 阶方阵，但仍有可能 $AB\neq BA$。
- 若 $AB=BA$，则称矩阵 A、B 乘积可交换，或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
  1. $A_{2\times1}$，$B_{1\times3}$，AB 为 2×3 的矩阵，但 BA 无意义。
  2. $A_{3\times1}$，$B_{1\times3}$，AB 和 BA 均有意义，但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
  3. 若 A、B 均为 n 阶方阵，AB 和 BA 也均为 n 阶方阵，但仍有可能 $AB \neq BA$。
- 若 $AB = BA$，则称矩阵 A、B 乘积可交换，或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
  1. $A_{2\times1}$，$B_{1\times3}$，AB 为 2×3 的矩阵，但 BA 无意义。
  2. $A_{3\times1}$，$B_{1\times3}$，AB 和 BA 均有意义，但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
  3. 若 A、B 均为 n 阶方阵，AB 和 BA 也均为 n 阶方阵，但仍有可能 $AB\neq BA$。
- 若 $AB=BA$，则称矩阵 A、B 乘积可交换，或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
  1. $A_{2\times 1}$，$B_{1\times 3}$，AB 为 2×3 的矩阵，但 BA 无意义。
  2. $A_{3\times 1}$，$B_{1\times 3}$，AB 和 BA 均有意义，但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
  3. 若 A、B 均为 n 阶方阵，AB 和 BA 也均为 n 阶方阵，但仍有可能 $AB \neq BA$。
- 若 $AB = BA$，则称矩阵 A、B 乘积可交换，或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
  1. $A_{2\times 1}$，$B_{1\times 3}$，AB 为 2×3 的矩阵，但 BA 无意义。
  2. $A_{3\times 1}$，$B_{1\times 3}$，AB 和 BA 均有意义，但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
  3. 若 A、B 均为 n 阶方阵，AB 和 BA 也均为 n 阶方阵，但仍有可能 $AB\neq BA$。
- 若 $AB=BA$，则称矩阵 A、B 乘积可交换，或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵。

矩阵乘积的“不可交换性”

特别提示

- AB 可乘的前提是 A 的列数等于 B 的行数。
- AB 乘积一般不可交换。
  1. $A_{2\times 1}$，$B_{1\times 3}$，AB 为 2×3 的矩阵，但 BA 无意义。
  2. $A_{3\times 1}$，$B_{1\times 3}$，AB 和 BA 均有意义，但 AB 和 BA 是阶数不同的矩阵。
  3. 若 A、B 均为 n 阶方阵，AB 和 BA 也均为 n 阶方阵，但仍有可能 $AB \neq BA$。
- 若 $AB = BA$，则称矩阵 A、B 乘积可交换，或简称 A 与 B 可交换。

例 3.1

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵。

单位矩阵与可换性

定义 3.1

称所有对角元都为 1、非对角元都为 0 的 n 阶方阵为 n 阶单位矩阵，记作 E_n（或 I_n），即

$$E_n(= I_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 设 B 是任意的一个 n 阶方阵，则可以验证 E_n 与 B 可交换，且

$$E_nB = BE_n = B.$$

单位矩阵与可换性

定义 3.1

称所有对角元都为 1、非对角元都为 0 的 n 阶方阵为 n 阶单位矩阵，记作 E_n（或 I_n），即

$$E_n(=I_n)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 设 B 是任意的一个 n 阶方阵，则可以验证 E_n 与 B 可交换，且

$$E_nB=BE_n=B.$$

对角阵与矩阵乘法

- 所有非对角元都为 0 的方阵称为对角矩阵。
- $$\operatorname{diag}(d_1,\ldots,d_n)=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

对角阵与矩阵乘法

- 所有非对角元都为 0 的方阵称为对角矩阵。

- $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$

对角阵与矩阵乘法

例 1

设 $A=\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$ 是一个对角矩阵，$B=(b_{ij})_{n\times k}$ 和 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 是两个一般的矩阵。则

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1k} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nk} \end{pmatrix},$$

$$CA=\begin{pmatrix} a_1c_{11} & a_2c_{12} & \cdots & a_nc_{1n} \\ a_1c_{21} & a_2c_{22} & \cdots & a_nc_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1c_{m1} & a_2b_{m2} & \cdots & a_nc_{mn} \end{pmatrix}.$$

三角阵与矩阵乘法

- 上三角矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},\ a_{ij}=0,\ \forall i>j,\ i,j=1,2,\dots,n。$$

- 下三角矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},\ a_{ij}=0,\ \forall i<j,\ i,j=1,2,\dots,n。$$

- 严格上（下）三角矩阵 — 对角元都为 0 的上（下）三角矩阵。

三角阵与矩阵乘法

- 上三角矩阵：
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},\ a_{ij}=0,\ \forall i>j,\ i,j=1,2,\ldots,n。$$
- 下三角矩阵：
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},\ a_{ij}=0,\ \forall i<j,\ i,j=1,2,\ldots,n。$$
- 严格上（下）三角矩阵 — 对角元都为 0 的上（下）三角矩阵。

三角阵与矩阵乘法

- 上三角矩阵：
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}，a_{ij}=0，\forall i>j，i,j=1,2,\ldots,n。$$
- 下三角矩阵：
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}，a_{ij}=0，\forall i<j，i,j=1,2,\ldots,n。$$
- 严格上（下）三角矩阵 — 对角元都为 0 的上（下）三角矩阵。

三角阵与矩阵乘法

命题 3.1

1. 设 A 和 B 是同阶上三角矩阵，则 AB 也是上三角矩阵。
2. 设 A 和 B 是同阶下三角矩阵，则 AB 也是下三角矩阵。
3. 设 A 和 B 是同阶对角矩阵，则 AB 也是对角矩阵。

三角阵与矩阵乘法

命题 3.1

1. 设 A 和 B 是同阶上三角矩阵，则 AB 也是上三角矩阵。
2. 设 A 和 B 是同阶下三角矩阵，则 AB 也是下三角矩阵。
3. 设 A 和 B 是同阶对角矩阵，则 AB 也是对角矩阵。

三角阵与矩阵乘法

命题 3.1

1. 设 A 和 B 是同阶上三角矩阵，则 AB 也是上三角矩阵。
2. 设 A 和 B 是同阶下三角矩阵，则 AB 也是下三角矩阵。
3. 设 A 和 B 是同阶对角矩阵，则 AB 也是对角矩阵。

三角阵与矩阵乘法

命题 3.1

1. 设 A 和 B 是同阶上三角矩阵，则 AB 也是上三角矩阵。
2. 设 A 和 B 是同阶下三角矩阵，则 AB 也是下三角矩阵。
3. 设 A 和 B 是同阶对角矩阵，则 AB 也是对角矩阵。

零矩阵与矩阵乘法

- 所有元素都是 0 的矩阵称为零矩阵；
- $m \times n$ 阶零矩阵常被记作 $0_{m \times n}$，当阶数已知或不重要时，零矩阵也常用 0 直接表示。
- 零矩阵与任意其它可乘矩阵相乘均为零矩阵。

零矩阵与矩阵乘法

- 所有元素都是 0 的矩阵称为零矩阵；
- $m \times n$ 阶零矩阵常被记作 $0_{m\times n}$，当阶数已知或不重要时，零矩阵也常用 0 直接表示。
- 零矩阵与任意其它可乘矩阵相乘均为零矩阵。

零矩阵与矩阵乘法

- 所有元素都是 0 的矩阵称为零矩阵；
- $m \times n$ 阶零矩阵常被记作 $0_{m\times n}$，当阶数已知或不重要时，零矩阵也常用 0 直接表示。
- 零矩阵与任意其它可乘矩阵相乘均为零矩阵。

消去律不成立

特别提示

矩阵乘积不满足消去律。即

$$A \neq 0,\ AB = AC \nRightarrow B = C.$$

- $AB = 0$ 且 $A \neq 0 \nRightarrow B = 0$。
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = 0$，但 $A \neq 0$，且 $B \neq 0$。

消去律不成立

特别提示

矩阵乘积不满足消去律。即

$$A \neq 0,\ AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

- $AB = 0$ 且 $A \neq 0 \not\Rightarrow B = 0$。
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$AB = 0$，但 $A \neq 0$，且 $B \neq 0$。

消去律不成立

特别提示

矩阵乘积不满足消去律。即

$$A \neq 0,\ AB = AC \nRightarrow B = C.$$

- $AB = 0$ 且 $A \neq 0 \nRightarrow B = 0$。
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = 0$，但 $A \neq 0$，且 $B \neq 0$。

消去律不成立

特别提示

矩阵乘积不满足消去律。即

$$A \neq 0,\ AB = AC \nRightarrow B = C.$$

- $AB = 0$ 且 $A \neq 0 \nRightarrow B = 0$。
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$AB = 0$，但 $A \neq 0$，且 $B \neq 0$。

消去律不成立

特别提示

矩阵乘积不满足消去律。即

$$A \neq 0,\ AB = AC \nRightarrow B = C.$$

- $AB = 0$ 且 $A \neq 0 \nRightarrow B = 0$。
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = 0$，但 $A \neq 0$，且 $B \neq 0$。

消去律不成立

特别提示

矩阵乘积不满足消去律。即

$$A \neq 0,\ AB = AC \nRightarrow B = C.$$

- $AB = 0$ 且 $A \neq 0 \nRightarrow B = 0$。
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = 0$，但 $A \neq 0$，且 $B \neq 0$。

乘法的“正常”性质

命题 3.2

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$、$B=(b_{ij})_{n\times k}$、$C=(c_{ij})_{k\times p}$，则

$$(AB)C=A(BC).$$

乘法次序对运算量的影响

例 2

取 $A=(1,2,3,4,5)$、$B=\begin{pmatrix}6\\7\\8\\9\\10\end{pmatrix}$，分别按照 $ABA=(AB)A$ 和 $ABA=A(BA)$ 两个公式计算 ABA，并比较两者在运算量上的差异。

Outline

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m \times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \qquad B = (b_{ij})_{m\times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}, \qquad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m \times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \qquad B = (b_{ij})_{m\times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}, \qquad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m\times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m\times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\qquad B=(b_{ij})_{m\times n}$$

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n},\qquad A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m\times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m\times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\qquad B=(b_{ij})_{m\times n}$$

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n},\qquad A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m \times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \qquad B = (b_{ij})_{m\times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}, \qquad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m \times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \qquad B = (b_{ij})_{m\times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}, \qquad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵的加法

定义 4.1

两个同为 $m \times n$ 的矩阵相加（减）后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为两矩阵对应元素的和（差）。

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \qquad B = (b_{ij})_{m\times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}, \qquad A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵加法的运算规则

运算规则：

- 交换律：$A+B=B+A$;
- 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$;
- 存在零元：$0+A=A+0=A$;
- 存在负元：$A+(-A)=0$;

负元

$-A:=0-A=(-a_{ij})_{m\times n}$

- 加减法关系：$A-B=A+(-B)$。
- 乘法和加法：$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$。

矩阵加法的运算规则

运算规则：

- 交换律：$A+B=B+A$；
- 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$；
- 存在零元：$0+A=A+0=A$；
- 存在负元：$A+(-A)=0$；

负元

$-A:=0-A=(-a_{ij})_{m\times n}$

- 加减法关系：$A-B=A+(-B)$。
- 乘法和加法：$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$。

矩阵加法的运算规则

运算规则：

- 交换律：$A + B = B + A$；
- 结合律：$(A + B) + C = A + (B + C)$；
- 存在零元：$0 + A = A + 0 = A$；
- 存在负元：$A + (-A) = 0$；

负元

$-A := 0 - A = (-a_{ij})_{m \times n}$

- 加减法关系：$A - B = A + (-B)$。
- 乘法和加法：$A(B + C) = AB + AC$，$(A + B)C = AC + BC$。

矩阵加法的运算规则

运算规则：

- 交换律：$A+B=B+A$；
- 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$；
- 存在零元：$0+A=A+0=A$；
- 存在负元：$A+(-A)=0$；

负元

$-A := 0-A=(-a_{ij})_{m\times n}$

- 加减法关系：$A-B=A+(-B)$。
- 乘法和加法：$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$。

矩阵加法的运算规则

运算规则：

- 交换律：$A+B=B+A$；
- 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$；
- 存在零元：$0+A=A+0=A$；
- 存在负元：$A+(-A)=0$；

负元

$-A:=0-A=(-a_{ij})_{m\times n}$

- 加减法关系：$A-B=A+(-B)$。
- 乘法和加法：$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$。

矩阵加法的运算规则

运算规则：

- 交换律：$A+B=B+A$；
- 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$；
- 存在零元：$0+A=A+0=A$；
- 存在负元：$A+(-A)=0$；

负元

$-A:=0-A=(-a_{ij})_{m\times n}$

- 加减法关系：$A-B=A+(-B)$。
- 乘法和加法：$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$。

矩阵数乘

定义 4.2

$m \times n$ 阶矩阵与一个数c 相乘后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为原矩阵对应元素乘以这个数。

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \qquad cA = (ca_{ij})_{m\times n},$$

$$c \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘

定义 4.2

$m \times n$ 阶矩阵与一个数c 相乘后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为原矩阵对应元素乘以这个数。

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \qquad cA = (ca_{ij})_{m\times n},$$

$$c \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘

定义 4.2

$m \times n$ 阶矩阵与一个数c 相乘后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为原矩阵对应元素乘以这个数。

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad cA = (ca_{ij})_{m\times n},$$

$$c \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘

定义 4.2

$m \times n$ 阶矩阵与一个数c 相乘后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为原矩阵对应元素乘以这个数。

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \qquad cA = (ca_{ij})_{m\times n},$$

$$c \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘

定义 4.2

$m \times n$ 阶矩阵与一个数c 相乘后得一 $m \times n$ 矩阵，其元素为原矩阵对应元素乘以这个数。

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \qquad cA = (ca_{ij})_{m\times n},$$

$$c \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵数乘运算规则

- 数乘和加法的协调: $c(A+B)=cA+cB$;
- 数的加法与数乘的协调: $(c+d)A=cA+dA$;
- 数的乘法与数乘的协调: $(cd)A=c(dA)$;
- 数 1 与数乘的协调: $1A=A$;
- 数 0 与数乘的协调: $0A=0_{m\times n}$;
- 乘法和数乘的协调: $cAB=(cA)B=A(cB)$。

矩阵数乘运算规则

- 数乘和加法的协调: $c(A+B)=cA+cB$;
- 数的加法与数乘的协调: $(c+d)A=cA+dA$;
- 数的乘法与数乘的协调: $(cd)A=c(dA)$;
- 数 1 与数乘的协调: $1A=A$;
- 数 0 与数乘的协调: $0A=0_{m\times n}$;
- 乘法和数乘的协调: $cAB=(cA)B=A(cB)$。

矩阵数乘运算规则

- 数乘和加法的协调: $c(A+B)=cA+cB$;
- 数的加法与数乘的协调: $(c+d)A=cA+dA$;
- 数的乘法与数乘的协调: $(cd)A=c(dA)$;
- 数 1 与数乘的协调: $1A=A$;
- 数 0 与数乘的协调: $0A=0_{m\times n}$;
- 乘法和数乘的协调: $cAB=(cA)B=A(cB)$。

矩阵数乘运算规则

- 数乘和加法的协调: $c(A+B)=cA+cB$;
- 数的加法与数乘的协调: $(c+d)A=cA+dA$;
- 数的乘法与数乘的协调: $(cd)A=c(dA)$;
- 数 1 与数乘的协调: $1A=A$;
- 数 0 与数乘的协调: $0A=0_{m\times n}$;
- 乘法和数乘的协调: $cAB=(cA)B=A(cB)$。

矩阵数乘运算规则

- 数乘和加法的协调: $c(A+B)=cA+cB$;
- 数的加法与数乘的协调: $(c+d)A=cA+dA$;
- 数的乘法与数乘的协调: $(cd)A=c(dA)$;
- 数 1 与数乘的协调: $1A=A$;
- 数 0 与数乘的协调: $0A=0_{m\times n}$;
- 乘法和数乘的协调: $cAB=(cA)B=A(cB)$。

矩阵数乘运算规则

- 数乘和加法的协调: $c(A+B)=cA+cB$;
- 数的加法与数乘的协调: $(c+d)A=cA+dA$;
- 数的乘法与数乘的协调: $(cd)A=c(dA)$;
- 数 1 与数乘的协调: $1A=A$;
- 数 0 与数乘的协调: $0A=0_{m\times n}$;
- 乘法和数乘的协调: $cAB=(cA)B=A(cB)$。

矩阵转置

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m} = A^T$$

矩阵转置

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m} = A^T$$

矩阵转置

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m} = A^T$$

矩阵转置

定义 4.3

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$。若 $b_{ij}=a_{ji}$ 对 $\forall i,j$ 均成立，则称 B 是 A 的转置，记作 $B=A^T$（或 $B=A'$）。

- 转置运算的运算法则：
  1. $(A^T)^T=A$;
  2. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
  3. $(cA)^T=cA^T$;
  4. $(AB)^T=B^TA^T$;
  5. $(A_1A_2\cdots A_s)^T=A_s^TA_{s-1}^T\cdots A_1^T$。

矩阵转置

定义 4.3

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$。若 $b_{ij}=a_{ji}$ 对 $\forall i,j$ 均成立，则称 B 是 A 的**转置**，记作 $B=A^T$(或 $B=A'$)。

- **转置运算的运算法则：**

1. $(A^T)^T=A$;
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
3. $(cA)^T=cA^T$;
4. $(AB)^T=B^TA^T$;
5. $(A_1A_2\cdots A_s)^T=A_s^TA_{s-1}^T\cdots A_1^T$。

矩阵转置

定义 4.3

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$。若 $b_{ij}=a_{ji}$ 对 $\forall i,j$ 均成立，则称 B 是 A 的转置，记作 $B=A^T$(或 $B=A'$)。

- 转置运算的运算法则：
  1. $(A^T)^T=A$;
  2. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
  3. $(cA)^T=cA^T$;
  4. $(AB)^T=B^TA^T$;
  5. $(A_1A_2\cdots A_s)^T=A_s^TA_{s-1}^T\cdots A_1^T$。

矩阵转置

定义 4.3

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$。若 $b_{ij}=a_{ji}$ 对 $\forall i,j$ 均成立，则称 B 是 A 的转置，记作 $B=A^T$(或 $B=A'$)。

- 转置运算的运算法则：
  1. $(A^T)^T=A$;
  2. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
  3. $(cA)^T=cA^T$;
  4. $(AB)^T=B^TA^T$;
  5. $(A_1A_2\cdots A_s)^T=A_s^TA_{s-1}^T\cdots A_1^T$。

矩阵转置

定义 4.3

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$。若 $b_{ij}=a_{ji}$ 对 $\forall i,j$ 均成立，则称 B 是 A 的转置，记作 $B=A^T$(或 $B=A'$)。

- **转置运算的运算法则：**
  1. $(A^T)^T=A$;
  2. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
  3. $(cA)^T=cA^T$;
  4. $(AB)^T=B^TA^T$;
  5. $(A_1A_2\cdots A_s)^T=A_s^TA_{s-1}^T\cdots A_1^T$。

矩阵转置

定义 4.3

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$。若 $b_{ij}=a_{ji}$ 对 $\forall i,j$ 均成立，则称 B 是 A 的转置，记作 $B=A^T$(或 $B=A'$)。

- **转置运算的运算法则：**
  1. $(A^T)^T=A$;
  2. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
  3. $(cA)^T=cA^T$;
  4. $(AB)^T=B^TA^T$;
  5. $(A_1A_2\cdots A_s)^T=A_s^TA_{s-1}^T\cdots A_1^T$。

矩阵转置

定义 4.3

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$。若 $b_{ij}=a_{ji}$ 对 $\forall i,j$ 均成立，则称 B 是 A 的转置，记作 $B=A^T$(或 $B=A'$)。

- 转置运算的运算法则：
  1. $(A^T)^T=A$;
  2. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
  3. $(cA)^T=cA^T$;
  4. $(AB)^T=B^TA^T$;
  5. $(A_1A_2\cdots A_s)^T=A_s^TA_{s-1}^T\cdots A_1^T$。

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$，则称 A 为对称矩阵；若 $A = -A^T$，则称 A 为反对称矩阵。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$，则称 A 为对称矩阵；若 $A = -A^T$，则称 A 为反对称矩阵。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$，则称 A 为对称矩阵；若 $A = -A^T$，则称 A 为反对称矩阵。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$，则称 A 为对称矩阵；若 $A = -A^T$，则称 A 为反对称矩阵。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$，则称 A 为对称矩阵；若 $A = -A^T$，则称 A 为反对称矩阵。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$，则称 A 为对称矩阵；若 $A = -A^T$，则称 A 为反对称矩阵。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$，则称 A 为对称矩阵；若 $A = -A^T$，则称 A 为反对称矩阵。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$，则称 A 为对称矩阵；若 $A = -A^T$，则称 A 为反对称矩阵。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称矩阵、反对称矩阵

定义 4.4

一个方阵 A 若满足 $A = A^T$，则称 A 为对称矩阵；若 $A = -A^T$，则称 A 为反对称矩阵。

对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A，存在对称矩阵 B，反对称矩阵 C，使得 $A = B + C$。

反对称矩阵形如

$$
\begin{pmatrix}
0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
-a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
-a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

- 对任意方阵 A，存在对称矩阵 B，反对称矩阵 C，使得 $A = B + C$。

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A，存在对称矩阵 B，反对称矩阵 C，使得 $A = B + C$。

反对称矩阵形如

$$
\begin{pmatrix}
0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
-a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
-a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

- 对任意方阵 A，存在对称矩阵 B，反对称矩阵 C，使得 $A = B + C$。

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A，存在对称矩阵 B，反对称矩阵 C，使得 $A = B + C$。

反对称矩阵形如

$$
\begin{pmatrix}
0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
-a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
-a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

- 对任意方阵 A，存在对称矩阵 B，反对称矩阵 C，使得 $A = B + C$。

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A，存在对称矩阵 B，反对称矩阵 C，使得 $A = B + C$。

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A，存在对称矩阵 B，反对称矩阵 C，使得 $A = B + C$。

反对称矩阵形如

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- 对任意方阵 A，存在对称矩阵 B，反对称矩阵 C，使得 $A = B + C$。

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z=a+bi\in\mathbb{C}(a,b\in\mathbb{R})$，称 $a-bi$ 为 z 的**共轭元**，记为 $\overline{z}$。

定义 4.6

复数域 $\mathbb{C}$ 上矩阵 $A=(a_{jk})_{m\times n}$ 的**共轭矩阵** $\overline{A}$ 定义为 $\overline{A}=(\overline{a_{jk}})_{m\times n}$。

- 运算规则：
  1. $\overline{(\overline{A})}=A$;
  2. $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;
  3. $\overline{cA}=\overline{c}\,\overline{A}$;
  4. $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$;
  5. $\overline{(A^T)}=\overline{A}^T$。

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z=a+bi\in\mathbb{C}(a,b\in\mathbb{R})$，称 $a-bi$ 为 z 的共轭元，记为 $\overline{z}$。

定义 4.6

复数域 $\mathbb{C}$ 上矩阵 $A=(a_{jk})_{m\times n}$ 的共轭矩阵 $\overline{A}$ 定义为 $\overline{A}=(\overline{a_{jk}})_{m\times n}$。

- 运算规则：
  1. $\overline{(\overline{A})}=A$;
  2. $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;
  3. $\overline{cA}=\overline{c}\,\overline{A}$;
  4. $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$;
  5. $\overline{(A^T)}=\overline{A}^T$。

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z=a+bi\in\mathbb{C}(a,b\in\mathbb{R})$，称 $a-bi$ 为 z 的共轭元，记为 $\overline{z}$。

定义 4.6

复数域 $\mathbb{C}$ 上矩阵 $A=(a_{jk})_{m\times n}$ 的共轭矩阵 $\overline{A}$ 定义为 $\overline{A}=(\overline{a_{jk}})_{m\times n}$。

- **运算规则：**
  1. $\overline{(\overline{A})}=A$;
  2. $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;
  3. $\overline{cA}=\overline{c}\overline{A}$;
  4. $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$;
  5. $\overline{(A^T)}=\overline{A}^T$。

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z = a + bi \in \mathbb{C}(a, b \in \mathbb{R})$，称 $a - bi$ 为 z 的共轭元，记为 $\bar{z}$。

定义 4.6

复数域 $\mathbb{C}$ 上矩阵 $A = (a_{jk})_{m\times n}$ 的共轭矩阵 $\overline{A}$ 定义为 $\overline{A} = (\overline{a_{jk}})_{m\times n}$。

- 运算规则：
  1. $\overline{(\overline{A})} = A$;
  2. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$;
  3. $\overline{cA} = \bar{c}\overline{A}$;
  4. $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$;
  5. $\overline{(A^T)} = \overline{A}^T$。

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z = a + bi \in \mathbb{C}(a, b \in \mathbb{R})$，称 $a - bi$ 为 z 的共轭元，记为 $\overline{z}$。

定义 4.6

复数域 $\mathbb{C}$ 上矩阵 $A = (a_{jk})_{m\times n}$ 的共轭矩阵 $\overline{A}$ 定义为 $\overline{A} = (\overline{a_{jk}})_{m\times n}$。

- **运算规则：**
  1. $\overline{(\overline{A})} = A$;
  2. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$;
  3. $\overline{cA} = \overline{c}\overline{A}$;
  4. $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$;
  5. $\overline{(A^T)} = \overline{A}^T$。

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z = a + bi \in \mathbb{C}(a, b \in \mathbb{R})$，称 $a - bi$ 为 z 的共轭元，记为 $\overline{z}$。

定义 4.6

复数域 $\mathbb{C}$ 上矩阵 $A = (a_{jk})_{m\times n}$ 的共轭矩阵 $\overline{A}$ 定义为 $\overline{A} = (\overline{a_{jk}})_{m\times n}$。

- **运算规则：**
  1. $\overline{(\overline{A})} = A$;
  2. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$;
  3. $\overline{cA} = \overline{c}\,\overline{A}$;
  4. $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$;
  5. $\overline{(A^T)} = \overline{A}^T$。

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z = a + bi \in \mathbb{C}(a, b \in \mathbb{R})$，称 $a - bi$ 为 z 的共轭元，记为 $\overline{z}$。

定义 4.6

复数域 $\mathbb{C}$ 上矩阵 $A = (a_{jk})_{m\times n}$ 的共轭矩阵 $\overline{A}$ 定义为 $\overline{A} = (\overline{a_{jk}})_{m\times n}$。

- **运算规则：**
  1. $\overline{(\overline{A})} = A$;
  2. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$;
  3. $\overline{cA} = \overline{c}\,\overline{A}$;
  4. $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$;
  5. $\overline{(A^T)} = \overline{A}^T$。

矩阵的共轭

定义 4.5

设复数 $z=a+bi\in\mathbb{C}(a,b\in\mathbb{R})$，称 $a-bi$ 为 z 的共轭元，记为 $\bar{z}$。

定义 4.6

复数域 $\mathbb{C}$ 上矩阵 $A=(a_{jk})_{m\times n}$ 的共轭矩阵 $\overline{A}$ 定义为 $\overline{A}=(\overline{a_{jk}})_{m\times n}$。

- **运算规则：**
  1. $\overline{(\overline{A})}=A$;
  2. $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;
  3. $\overline{cA}=\bar{c}\overline{A}$;
  4. $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$;
  5. $\overline{(A^T)}=\overline{A}^T$。

方阵的幂

定义 4.7

设 A 是一个方阵，定义方阵的幂：

$$A^2 := A \times A; \cdots; \ A^r := A^{r-1} \times A = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{r}$$

- $A^r \times A^s = A^{r+s}$;
- $(A^r)^s = A^{rs}$;
- 若 $AB = BA$，则 $(AB)^s = A^s B^s$。
- 若 $AB = BA$，则

$$(A+B)^s = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} A^{s-i} B^i$$

方阵的幂

定义 4.7

设 A 是一个方阵，定义方阵的幂：

$$A^2 := A \times A; \cdots ; \; A^r := A^{r-1} \times A = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{r}$$

- $A^r \times A^s = A^{r+s}$;
- $(A^r)^s = A^{rs}$;
- 若 $AB = BA$，则 $(AB)^s = A^s B^s$。
- 若 $AB = BA$，则

$$(A+B)^s = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} A^{s-i} B^i$$

方阵的幂

定义 4.7

设 A 是一个方阵，定义方阵的幂：

$$A^2 := A \times A; \cdots; \ A^r := A^{r-1} \times A = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{r}$$

- $A^r \times A^s = A^{r+s}$;
- $(A^r)^s = A^{rs}$;
- 若$AB = BA$，则 $(AB)^s = A^s B^s$。
- 若$AB = BA$，则

$$(A+B)^s = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} A^{s-i} B^i$$

方阵的幂

定义 4.7

设 A 是一个方阵，定义方阵的幂：

$$A^2 := A \times A; \cdots; \ A^r := A^{r-1} \times A = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{r}$$

- $A^r \times A^s = A^{r+s}$;
- $(A^r)^s = A^{rs}$;
- 若 $AB = BA$，则 $(AB)^s = A^s B^s$。
- 若 $AB = BA$，则

$$(A+B)^s = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} A^{s-i} B^i$$

方阵的幂

定义 4.7

设 A 是一个方阵，定义方阵的幂：

$$A^2 := A \times A; \cdots ; \ A^r := A^{r-1} \times A = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{r}$$

- $A^r \times A^s = A^{r+s}$；
- $(A^r)^s = A^{rs}$；
- 若 $AB = BA$，则 $(AB)^s = A^s B^s$。
- 若 $AB = BA$，则

$$(A+B)^s = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} A^{s-i} B^i$$

例

例 4.1

设 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，求 A^2。

例 4.2

设 $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求 B^2，B^3。

例

例 4.1

设 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，求 A^2。

例 4.2

设 $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求 B^2，B^3。

例

例 4.3

一般的，设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$，求 A^k。

例

例 4.4

设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

求 A^n。

例 4.5

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -3\\ 2 & -2 & 6\end{pmatrix},$$

求 A^{2025}。

例

例 4.4

设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

求 A^n。

例 4.5

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

求 A^{2025}。