矩阵与初等变换——线性方程组的算法求解

$ 2.1 线性方程组、消元法及几何直观

高等代数 https://gdfzu.club

Outline

1. 二元一次及三元一次方程组解法回顾
2. 线性方程组的几何解释
3. 一般线性方程组

Outline

1. 二元一次及三元一次方程组解法回顾
2. 线性方程组的几何解释
3. 一般线性方程组

二元一次方程组的求解

例 1

求解方程组:

$$\begin{cases} x+2y = 4, \\ x-y = 1. \end{cases}$$

三元一次方程组的求解

例 2

求解方程组:

$$\begin{cases} x+y+z = 4, \\ x-y+z = 0, \\ x \quad\quad + z = 2. \end{cases}$$

三元一次方程组的求解

例 3

求解方程组:

$$\begin{cases} x+y+z &= 4, \\ x-y+z &= 0, \\ x \quad\;\; +z &= 4. \end{cases}$$

Outline

1 二元一次及三元一次方程组解法回顾

2 线性方程组的几何解释

3 一般线性方程组

二元一次方程组的几何解释

- 二元一次方程对应于坐标平面里的一条直线；
- 二元一次方程组的解对应于直线交点；
- 两条直线共有三种相对位置关系：相交于一点、无交点（平行）或重合；
- 解的情况也可以分成三类：有唯一解、无解或有无穷多解。

二元一次方程组的几何解释

- 二元一次方程对应于坐标平面里的一条直线；
- 二元一次方程组的解对应于直线交点；
- 两条直线共有三种相对位置关系：相交于一点、无交点（平行）或重合；
- 解的情况也可以分成三类：有唯一解、无解或有无穷多解。

二元一次方程组的几何解释

- 二元一次方程对应于坐标平面里的一条直线；
- 二元一次方程组的解对应于直线交点；
- 两条直线共有三种相对位置关系：相交于一点、无交点（平行）或重合；
- 解的情况也可以分成三类：有唯一解、无解或有无穷多解。

二元一次方程组的几何解释

- 二元一次方程对应于坐标平面里的一条直线;
- 二元一次方程组的解对应于直线交点;
- 两条直线共有三种相对位置关系：相交于一点、无交点（平行）或重合;
- 解的情况也可以分成三类：有唯一解、无解或有无穷多解。

三元一次方程组的几何解释

- 三元一次方程对应于立体坐标系中的平面；
- 三元一次方程组的解对应于平面交点；
- 多个平面相对位置关系：相交于一点、无公共交点、相交于一条公共直线、重合；
- 解的情况仍可以分成三类：有唯一解、无解或有无穷多解。

三元一次方程组的几何解释

- 三元一次方程对应于立体坐标系中的平面；
- 三元一次方程组的解对应于平面交点；
- 多个平面相对位置关系：相交于一点、无公共交点、相交于一条公共直线、重合；
- 解的情况仍可以分成三类：有唯一解、无解或有无穷多解。

三元一次方程组的几何解释

- 三元一次方程对应于立体坐标系中的平面;
- 三元一次方程组的解对应于平面交点;
- 多个平面相对位置关系：相交于一点、无公共交点、相交于一条公共直线、重合;
- 解的情况仍可以分成三类：有唯一解、无解或有无穷多解。

三元一次方程组的几何解释

- 三元一次方程对应于立体坐标系中的平面；
- 三元一次方程组的解对应于平面交点；
- 多个平面相对位置关系：相交于一点、无公共交点、相交于一条公共直线、重合；
- 解的情况仍可以分成三类：有唯一解、无解或有无穷多解。

Outline

1 二元一次及三元一次方程组解法回顾

2 线性方程组的几何解释

3 一般线性方程组

一般线性方程组定义

定义 3.1

称形如

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

的方程为一个线性方程，其中 $a_1, \ldots, a_n, b$ 都是一些给定常数，$x_1, \ldots, x_n$ 则是这个 n 元线性方程中的 n 个变元（或未知量、变量）。

把多个含有相同变元的线性方程放在一起，所构成的方程组，即形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

的方程组称为n 元线性方程组。

一般线性方程组定义

定义 3.1

称形如

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$$

的方程为一个线性方程，其中 $a_1,\ldots,a_n,b$ 都是一些给定常数，$x_1,\ldots,x_n$ 则是这个 n 元线性方程中的 n 个变元（或未知量、变量）。把多个含有相同变元的线性方程放在一起，所构成的方程组，即形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

的方程组称为n 元线性方程组。

一般线性方程组定义

定义 3.2

特别地，若所有的 a_{jk} 和 b_k $(j=1,\dots,n;k=1,\dots,m)$ 均属于一个给定的数域 $\mathbb{F}$，则 *(3.1)* 也称为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性方程组。

一组给定的数 $(s_1,\dots,s_n)$ 若满足将每一个 x_j 均用 s_j 代入到 *(3.1)* 中后所有等式均成立，则称 $(s_1,\dots,s_n)$ 是这个线性方程组的一个解。由所有解构成的集合称为线性方程组的解集。

一般线性方程组定义

定义 3.2

特别地，若所有的 a_{jk} 和 b_k $(j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, m)$ 均属于一个给定的数域 $\mathbb{F}$，则 *(3.1)* 也称为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性方程组。

一组给定的数 $(s_1, \ldots, s_n)$ 若满足将每一个 x_j 均用 s_j 代入到 *(3.1)* 中后所有等式均成立，则称 $(s_1, \ldots, s_n)$ 是这个线性方程组的一个解。由所有解构成的集合称为线性方程组的解集。

Guass 消去法

例 4

求解线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 & = 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 & = 23, \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 7x_4 & = -7. \end{cases}$$