§1.7 有理系数和整系数多项式

高等代数 https://gdfzu.club

提纲

1. 有理系数多项式到整系数多项式的转化

2. 整系数多项式不可约性的判定

问题的引入

- 对任意 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，若 $\deg f(x) \geq 1$，则 $f(x)$ 可唯一分解成不可约的有理系数多项式的积。

问题的引入

- 对任意 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，若 $\deg f(x) \geq 1$，则 $f(x)$ 可唯一分解成不可约的有理系数多项式的积。
- 在 $\mathbb{Q}$ 上，该如何判断多项式的不可约性?

问题的引入

- 对任意 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，若 $\deg f(x) \geq 1$，则 $f(x)$ 可唯一分解成不可约的有理系数多项式的积。
- 在 $\mathbb{Q}$ 上，该如何判断多项式的不可约性?
- 有理系数多项式可归结为整系数多项式的问题。

问题的引入

- 对任意 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，若 $\deg f(x) \geq 1$，则 $f(x)$ 可唯一分解成不可约的有理系数多项式的积。
- 在 $\mathbb{Q}$ 上，该如何判断多项式的不可约性?
- 有理系数多项式可归结为整系数多项式的问题。

  这是因为，设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x],$$

问题的引入

- 对任意 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，若 $\deg f(x) \geq 1$，则 $f(x)$ 可唯一分解成不可约的有理系数多项式的积。
- 在 $\mathbb{Q}$ 上，该如何判断多项式的不可约性?
- 有理系数多项式可归结为整系数多项式的问题。

  这是因为，设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x],$$

  则可选取适当整数 c，使 $cf(x) \in \mathbb{Z}[x]$。

问题的引入

- 对任意 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，若 $\deg f(x) \geq 1$，则 $f(x)$ 可唯一分解成不可约的有理系数多项式的积。
- 在 $\mathbb{Q}$ 上，该如何判断多项式的不可约性?
- 有理系数多项式可归结为整系数多项式的问题。

  这是因为，设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x],$$

则可选取适当整数 c，使 $cf(x) \in \mathbb{Z}[x]$。若 $cf(x)$ 的各项系数有公因子，就可以提出来，得

$$cf(x) = dg(x),$$

问题的引入

- 对任意 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，若 $\deg f(x) \geq 1$，则 $f(x)$ 可唯一分解成不可约的有理系数多项式的积。
- 在 $\mathbb{Q}$ 上，该如何判断多项式的不可约性?
- 有理系数多项式可归结为整系数多项式的问题。

  这是因为，设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x],$$

则可选取适当整数 c，使 $cf(x) \in \mathbb{Z}[x]$。若 $cf(x)$ 的各项系数有公因子，就可以提出来，得

$$cf(x) = dg(x),$$

也即

$$f(x) = \frac{d}{c} g(x),$$

其中 $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$，且各项系数没有异于 ± 1 的公因子。

整系数多项式

定义 1.1

设多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式，若 $a_n,a_{n-1},\ldots,a_0$ 的最大公约数为 1，则称 $f(x)$ 为本原多项式。

整系数多项式

定义 1.1

设多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式，若 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ 的最大公约数为 *1*，则称 $f(x)$ 为本原多项式。

- $\forall f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，$\exists r \in \mathbb{Q}$，使得 $f(x) = rg(x)$，其中 $g(x)$ 为本原多项式。

整系数多项式

定义 1.1

设多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式，若 $a_n,a_{n-1},\ldots,a_0$ 的最大公约数为 1，则称 $f(x)$ 为本原多项式。

- $\forall f(x)\in\mathbb{Q}[x]$，$\exists r\in\mathbb{Q}$，使得 $f(x)=rg(x)$，其中 $g(x)$ 为本原多项式。
- 除了相差一个正负号外，上述表示法唯一。

整系数多项式

定义 1.1

设多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式，若 $a_n,a_{n-1},\ldots,a_0$ 的最大公约数为 1，则称 $f(x)$ 为本原多项式。

- $\forall f(x)\in\mathbb{Q}[x]$，$\exists r\in\mathbb{Q}$，使得 $f(x)=rg(x)$，其中 $g(x)$ 为本原多项式。
- 除了相差一个正负号外，上述表示法唯一。

引理 1.1 (Gauss 引理)

两个本原多项式之积是本原多项式。

整系数多项式

定义 1.2

设 $f(x)$ 是整系数多项式，$\deg f(x) \geq 1$，若 $f(x)$ 能表为两个次数较小的整系数多项式之积，即

$$f(x) = g(x)h(x),$$

其中 $g(x)$、$h(x)$ 是整系数多项式，且 $\deg g(x) < \deg f(x)$，$\deg h(x) < \deg f(x)$，则称 $f(x)$ 在整数上**可约多项式**，否则 $f(x)$ 在整数上**不可约多项式**。

$\mathbb{Q}$ 上多项式可约性与 $\mathbb{Z}$ 上多项式可约性

引理 1.2

若多项式 $f(x)$ 是整系数多项式，$p(x)$ 是本原多项式，且 $f(x) = cp(x)$，则 c 必为整数。

$\mathbb{Q}$ 上多项式可约性与 $\mathbb{Z}$ 上多项式可约性

引理 1.2

若多项式 $f(x)$ 是整系数多项式，$p(x)$ 是本原多项式，且 $f(x) = cp(x)$，则 c 必为整数。

定理 1.1

整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上可约 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在整数上可约。

$\mathbb{Q}$ 上多项式可约性与 $\mathbb{Z}$ 上多项式可约性

引理 1.2

若多项式 $f(x)$ 是整系数多项式，$p(x)$ 是本原多项式，且 $f(x) = cp(x)$，则 c 必为整数。

定理 1.1

整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上可约 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在整数上可约。

- 有理系数多项式在有理数域上的可约问题可以转化为整系数多项式在整数上的可约问题。

整系数多项式唯一分解定理

定理 1.2

任一整系数多项式总可以表示为一个整数和若干个不可约的本原多项式的乘积，且在不计因式的次序和符号的前提下，这种分解是唯一的。

提纲

1. 有理系数多项式到整系数多项式的转化
2. 整系数多项式不可约性的判定

举例

例 1

设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不同的整数，证明：$f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

不可约性的充分条件

定理 2.1 (Eisenstein 判别法)

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$。若有一个素数$p$，使得:

则 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的。

不可约性的充分条件

定理 2.1 (Eisenstein 判别法)

设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$。若有一个素数$p$，使得:

1. $p \nmid a_n$，

则 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的。

不可约性的充分条件

定理 2.1 (Eisenstein 判别法)

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$。若有一个素数$p$，使得:

1. $p \nmid a_n$，
2. $p | a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$，

则 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的。

不可约性的充分条件

定理 2.1 (Eisenstein 判别法)

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$。若有一个素数$p$，使得:

1. $p \nmid a_n$,
2. $p | a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$,
3. $p^2 \nmid a_0$;

则 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的。

不可约性的充分条件

定理 2.1 (Eisenstein 判别法)

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$。若有一个素数$p$，使得:

1. $p \nmid a_n$,
2. $p | a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$,
3. $p^2 \nmid a_0$;

则 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的。

- p 为素数是重要的。

不可约性的充分条件

定理 2.1 (Eisenstein 判别法)

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$。若有一个素数$p$，使得：

1. $p \nmid a_n$，
2. $p|a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_0$，
3. $p^2 \nmid a_0$；

则 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的。

- p 为素数是重要的。
- p 若不存在，不能断定 $f(x)$ 是否可约。

例子

例 2

对任意 $n \geq 1$，$x^n - 2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

例子

例 2

对任意 $n \geq 1$，$x^n - 2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

例 3

对任意 $n, m \geq 1$，两两不同的素数 $p_1, p_2, \ldots, p_m$，证明 $x^n - p_1 p_2 \cdots p_m$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

例子

例 2

对任意 $n \geq 1$，$x^n - 2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

例 3

对任意 $n, m \geq 1$，两两不同的素数 $p_1, p_2, \ldots, p_m$，证明 $x^n - p_1 p_2 \cdots p_m$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

例 4

证明当 n 为素数时，$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

例子

例 2

对任意 $n \geq 1$，$x^n - 2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

例 3

对任意 $n, m \geq 1$，两两不同的素数 $p_1, p_2, \ldots, p_m$，证明 $x^n - p_1 p_2 \cdots p_m$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

例 4

证明当 n 为素数时，$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

例 5

若 p 为素数，证明 $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

整系数多项式的根

定理 2.2

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式，则有理数 q/p 是 $f(x)$ 的根的必要条件是 $p|a_n$，$q|a_0$，其中 p, q 是互素的整数。

整系数多项式的根

定理 2.2

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式，则有理数 q/p 是 $f(x)$ 的根的必要条件是 $p|a_n$，$q|a_0$，其中 p, q 是互素的整数。

- 首一的整系数多项式的有理根必为整数，且是 a_0 的因子。

整系数多项式的根

定理 2.2

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是整系数多项式，则有理数 q/p 是 $f(x)$ 的根的必要条件是 $p|a_n$，$q|a_0$，其中 p, q 是互素的整数。

- **首一的整系数多项式的有理根必为整数，且是 a_0 的因子。**

例 6

判断 $x^3 + 6x^2 + 9x + 1$ 是否有有理根?

整系数多项式的根

定理 2.2

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式，则有理数 q/p 是 $f(x)$ 的根的必要条件是 $p|a_n$，$q|a_0$，其中 p,q 是互素的整数。

- **首一的整系数多项式的有理根必为整数，且是 a_0 的因子。**

例 6

判断 x^3+6x^2+9x+1 是否有有理根?

例 7

证明 $f(x)=x^5-12x^3+36x+12$ 没有有理根。

整系数多项式的根

引理 2.1

若多项式 $f(x)$ 是整系数多项式，$g(x)$ 是本原多项式，$h(x)$ 是有理系数多项式且 $f(x) = g(x)h(x)$，则 $h(x)$ 必为整系数多项式。

整系数多项式的根

引理 2.1

若多项式 $f(x)$ 是整系数多项式，$g(x)$ 是本原多项式，$h(x)$ 是有理系数多项式且 $f(x)=g(x)h(x)$，则 $h(x)$ 必为整系数多项式。

定理 2.3

设整数 c 是整系数多项式 $f(x)$ 的根，则 $\frac{f(1)}{c-1}$，$\frac{f(-1)}{c+1}$ 都是整数。

整系数多项式的根

引理 2.1

若多项式 $f(x)$ 是整系数多项式，$g(x)$ 是本原多项式，$h(x)$ 是有理系数多项式且 $f(x)=g(x)h(x)$，则 $h(x)$ 必为整系数多项式。

定理 2.3

设整数 c 是整系数多项式 $f(x)$ 的根，则 $\frac{f(1)}{c-1}$，$\frac{f(-1)}{c+1}$ 都是整数。

- $\frac{f(1)}{c-1}$，$\frac{f(-1)}{c+1} \in \mathbb{Z}$ 仅是断定整数 c 是 $f(x)$ 根的必要条件，非充分条件。如 2 非 x^2+2 的根。

整系数多项式的根

引理 2.1

若多项式 $f(x)$ 是整系数多项式，$g(x)$ 是本原多项式，$h(x)$ 是有理系数多项式且 $f(x)=g(x)h(x)$，则 $h(x)$ 必为整系数多项式。

定理 2.3

设整数 c 是整系数多项式 $f(x)$ 的根，则 $\frac{f(1)}{c-1}$，$\frac{f(-1)}{c+1}$ 都是整数。

- $\frac{f(1)}{c-1}$，$\frac{f(-1)}{c+1} \in \mathbb{Z}$ 仅是断定整数 c 是 $f(x)$ 根的必要条件，非充分条件。如 2 非 x^2+2 的根。

例 8

证明 $f(x)=x^5-12x^3+36x+12$ 没有有理根。