§1.6 复系数、实系数多项式的标准分解式

高等代数 <https://gdfzu.club>

提纲

- 1 复系数多项式的标准分解式
- 2 实系数多项式的标准分解式
- 3 根与系数的关系—Viète 定理

复系数多项式

- 复数域是一个堪称完美的数域。

复系数多项式

- 复数域是一个堪称完美的数域。

定理 1.1 (代数学基本定理)

每个 $\mathbb{C}$ 上次数大于 0 的多项式都在 $\mathbb{C}$ 上至少有一个根。

复系数多项式

- 复数域是一个堪称完美的数域。

定理 1.1 (代数学基本定理)

每个 $\mathbb{C}$ 上次数大于 0 的多项式都在 $\mathbb{C}$ 上至少有一个根。

定理 1.2

$\mathbb{C}$ 上的一元 n 次多项式在 $\mathbb{C}$ 内恰有 n 个根 (重根按重数计)。

复系数多项式

- 复数域是一个堪称完美的数域。

定理 1.1 (代数学基本定理)

每个 $\mathbb{C}$ 上次数大于 0 的多项式都在 $\mathbb{C}$ 上至少有一个根。

定理 1.2

$\mathbb{C}$ 上的一元 n 次多项式在 $\mathbb{C}$ 内恰有 n 个根 (重根按重数计)。

推论 1.1

$\mathbb{C}$ 上的不可约多项式都是一次的。

复系数多项式的标准分解式

定理 1.3

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 上非常数多项式, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的标准分解式为

$$f(x) = c(x - a_1)^{e_1}(x - a_2)^{e_2} \cdots (x - a_m)^{e_m}$$

其中 $a_i \in \mathbb{C}$ 且两两互异, e_i 正整数, $i = 1, 2, \dots, m$, $\sum_{i=1}^m e_i = n$ 。

提纲

- 1 复系数多项式的标准分解式
- 2 实系数多项式的标准分解式
- 3 根与系数的关系—Viète 定理

实系数不可约多项式

引理 2.1

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是实系数多项式。若复数 $a + bi$ ($b \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$) 是 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的根, 则 $a - bi$ 也是 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的根。

实系数不可约多项式

引理 2.1

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是实系数多项式。若复数 $a + bi$ ($b \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$) 是 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的根, 则 $a - bi$ 也是 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的根。

推论 2.1

实数域上不可约多项式或为一次或为二次多项式 $ax^2 + bx + c$, 其中 $b^2 - 4ac < 0$ 。

实系数多项式的标准分解式

定理 2.1 ($\mathbb{R}$ 上非常数多项式的标准分解式)

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上非常数多项式, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的标准分解式为

$$f(x) = d(x - a_1)^{e_1} \cdots (x - a_m)^{e_m} (x^2 + b_1x + c_1)^{\ell_1} \cdots (x^2 + b_r x + c_r)^{\ell_r}$$

其中 $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, e_i, ℓ_j 是正整数, $b_j^2 - 4c_j < 0$, a_i 两两互异, 且 $x^2 + b_j x + c_j$ 两两互素, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r$,

$$\sum_{i=1}^m e_i + 2 \sum_{j=1}^r \ell_j = \deg f(x).$$

例子

例 1

设 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ 。若对于任意的 $c \in \mathbb{R}$, $f(c) \in \mathbb{R}$ 。求证 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 。

例子

例 1

设 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ 。若对于任意的 $c \in \mathbb{R}$, $f(c) \in \mathbb{R}$ 。求证 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 。

例 2

求 $x^n - 1$ 在 $\mathbb{C}$ 上与在 $\mathbb{R}$ 上的标准分解式。

提纲

- 1 复系数多项式的标准分解式
- 2 实系数多项式的标准分解式
- 3 根与系数的关系—Viète 定理

根与系数的关系—Viète 定理

定理 3.1 (Viète 定理)

设

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$$

在 $\mathbb{F}$ 中有 n 个根 $c_1, c_2, \dots, c_n$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} c_i &= -a_{n-1}; \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_i c_j &= a_{n-2}; \\ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} c_i c_j c_k &= -a_{n-3}; \\ &\vdots \\ c_1 c_2 \cdots c_n &= (-1)^n a_0 \end{aligned}$$

例子

例 3

写出下列多项式根与系数的关系:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_3 \neq 0$$

例子

例 3

写出下列多项式根与系数的关系:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_3 \neq 0$$

例 4

设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 的 n 个根 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 两两互异, 且 $c_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 求 $\mathbb{C}$ 上以 $\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \dots, \frac{1}{c_n}$ 为根的多项式。