

§1.5 不可约因式的重数

高等代数 <https://gdfzu.club>

提纲

① 单因式与重因式

② 重因式与导数

③ 一次因式重数与多项式函数的根

单因式与重因式

定义 1.1

设不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因式, 如果满足

$$p^k(x) | f(x) \text{ 并且 } p^{k+1}(x) \nmid f(x),$$

则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个 k 重因式。特别的,

单因式与重因式

定义 1.1

设不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因式, 如果满足

$$p^k(x) | f(x) \text{ 并且 } p^{k+1}(x) \nmid f(x),$$

则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个 k 重因式。特别的,

- 当 $k=0$ 时, $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式;

单因式与重因式

定义 1.1

设不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因式, 如果满足

$$p^k(x) | f(x) \text{ 并且 } p^{k+1}(x) \nmid f(x),$$

则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个 k 重因式。特别的,

- 当 $k=0$ 时, $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式;
- 当 $k=1$ 时, $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的单因式;

单因式与重因式

定义 1.1

设不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因式, 如果满足

$$p^k(x) | f(x) \text{ 并且 } p^{k+1}(x) \nmid f(x),$$

则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个 k 重因式。特别的,

- 当 $k=0$ 时, $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式;
- 当 $k=1$ 时, $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的单因式;
- 当 $k>1$ 时, $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的重因式。

单因式与重因式

定义 1.1

设不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因式, 如果满足

$$p^k(x) | f(x) \text{ 并且 } p^{k+1}(x) \nmid f(x),$$

则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的一个 k 重因式。特别的,

- 当 $k=0$ 时, $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式;
- 当 $k=1$ 时, $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的单因式;
- 当 $k>1$ 时, $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的重因式。

- 不可约多项式 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式

$$\Leftrightarrow f(x) = p^k(x)h(x), \quad (p(x), h(x)) = 1.$$

例子

例 1

分别在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 上叙述 $p(x) = x^2 + 1$ 是否是 $f(x) = (x^4 - 1)^3$ 的重因式。若是，是几重因式；若不是，为什么？

提纲

① 单因式与重因式

② 重因式与导数

③ 一次因式重数与多项式函数的根

多项式导数

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则其导数为

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

多项式导数

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则其导数为

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x);$

多项式导数

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则其导数为

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x);$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$

多项式导数

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则其导数为

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x);$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$
- $(cf(x))' = cf'(x);$

多项式导数

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则其导数为

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
- $(cf(x))' = cf'(x)$;
- $(f^m(x))' = m f^{m-1}(x) f'(x)$

重因式的判定

定理 2.1

若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 ($k \geq 1$), 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式。

重因式的判定

定理 2.1

若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 ($k \geq 1$), 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式。

- **问题：**定理2.1的逆命题是否成立？

重因式的判定

定理 2.1

若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 ($k \geq 1$), 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式。

- **问题**: 定理2.1的逆命题是否成立?
- **反例**: $f(x) = x^3 - 1$, $p(x) = x$ 。

重因式的判定

推论 2.1

不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 ($k > 1$) $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $(f(x), f'(x))$ 的 $k-1$ 重因式。

重因式的判定

推论 2.1

不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 ($k > 1$) $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $(f(x), f'(x))$ 的 $k-1$ 重因式。

推论 2.2

不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 ($k \geq 1$) $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(k-1)}(x)$ 的因式, 但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式。

重因式的判定

推论 2.1

不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 ($k > 1$) $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $(f(x), f'(x))$ 的 $k-1$ 重因式。

推论 2.2

不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 ($k \geq 1$) $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(k-1)}(x)$ 的因式, 但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式。

推论 2.3

$p(x)$ 是不可约多项式, 则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式 $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的公因式。

例子

例 2

证明：有理数域上的多项式 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 没有重因式。

去除重数的有效方法

推论 2.4

设 $d(x) = (f(x), f'(x))$, $f(x) = f_1(x)d(x)$, 则 $f_1(x)$ 是一个无重因式的多项式, 且此多项式的每一个不可约因式与 $f(x)$ 的不可约因式相同。

去除重数的有效方法

推论 2.4

设 $d(x) = (f(x), f'(x))$, $f(x) = f_1(x)d(x)$, 则 $f_1(x)$ 是一个无重因式的多项式, 且此多项式的每一个不可约因式与 $f(x)$ 的不可约因式相同。

- $f(x)$ 与 $\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 有完全相同的不可约因式。

去除重数的有效方法

推论 2.4

设 $d(x) = (f(x), f'(x))$, $f(x) = f_1(x)d(x)$, 则 $f_1(x)$ 是一个无重因式的多项式, 且此多项式的每一个不可约因式与 $f(x)$ 的不可约因式相同。

- $f(x)$ 与 $\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 有完全相同的不可约因式。
- $\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 的因式皆为单因式。

去除重数的有效方法

推论 2.4

设 $d(x) = (f(x), f'(x))$, $f(x) = f_1(x)d(x)$, 则 $f_1(x)$ 是一个无重因式的多项式, 且此多项式的每一个不可约因式与 $f(x)$ 的不可约因式相同。

- $f(x)$ 与 $\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 有完全相同的不可约因式。
- $\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 的因式皆为单因式。
- 去除重数的有效方法:

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = cp_1(x)p_2(x) \cdots p_m(x)$$

去除重数的有效方法

推论 2.4

设 $d(x) = (f(x), f'(x))$, $f(x) = f_1(x)d(x)$, 则 $f_1(x)$ 是一个无重因式的多项式, 且此多项式的每一个不可约因式与 $f(x)$ 的不可约因式相同。

- $f(x)$ 与 $\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 有完全相同的不可约因式。
- $\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 的因式皆为单因式。
- 去除重数的有效方法:

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = cp_1(x)p_2(x) \cdots p_m(x)$$

例 3

求 $f(x) = x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 60x - 72$ 在实数域上的标准分解式。

推论

推论 2.5

$f(x)$ 无重因式 $\Leftrightarrow (f(x), f'(x)) = 1$ 。

推论

推论 2.5

$f(x)$ 无重因式 $\Leftrightarrow (f(x), f'(x)) = 1$ 。

- 判断 $f(x)$ 是否有重因式无需进行因式分解；

推论

推论 2.5

$f(x)$ 无重因式 $\Leftrightarrow (f(x), f'(x)) = 1$ 。

- 判断 $f(x)$ 是否有重因式无需进行因式分解；
- $f(x)$ 是否可约与数域有关；

推论

推论 2.5

$f(x)$ 无重因式 $\Leftrightarrow (f(x), f'(x)) = 1$ 。

- 判断 $f(x)$ 是否有重因式无需进行因式分解；
- $f(x)$ 是否可约与数域有关；
- $p(x)$ 是否是 $f(x)$ 的重因式与数域有关；但 $f(x)$ 是否有重因式与数域无关。

提纲

- ① 单因式与重因式
- ② 重因式与导数
- ③ 一次因式重数与多项式函数的根

多项式函数的根

定义 3.1

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $b \in \mathbb{F}$, 且 $f(b) = 0$, 则称 b 为 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 内的一个根或零点。

多项式函数的根

定义 3.1

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $b \in \mathbb{F}$, 且 $f(b) = 0$, 则称 b 为 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 内的一个根或零点。

命题 3.1

b 是 $f(x)$ 的根当且仅当 $(x - b) | f(x)$ 。

多项式函数的根

定义 3.1

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $b \in \mathbb{F}$, 且 $f(b) = 0$, 则称 b 为 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 内的一个根或零点。

命题 3.1

b 是 $f(x)$ 的根当且仅当 $(x - b) | f(x)$ 。

例 4

$c = 2$ 是 $f(x) = x^5 - 12x^3 + 36x + 12$ 的根吗?

多项式函数的根

定义 3.1

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $b \in \mathbb{F}$, 且 $f(b) = 0$, 则称 b 为 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 内的一个根或零点。

命题 3.1

b 是 $f(x)$ 的根当且仅当 $(x - b) \mid f(x)$ 。

例 4

$c = 2$ 是 $f(x) = x^5 - 12x^3 + 36x + 12$ 的根吗?

例 5

证明: $x \mid f(x)$ 的充分必要条件是 $x \mid f^2(x)$ 。

根的个数定理

定理 3.1 (根的个数定理)

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) = n > 0$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 内至多有 n 个不同的根。

根的个数定理

定理 3.1 (根的个数定理)

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) = n > 0$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 内至多有 n 个不同的根。

推论 3.1

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) \leq n$, $\deg g(x) \leq n$, 且存在 $n+1$ 个不同的数 $b_1, b_2, \dots, b_{n+1} \in \mathbb{F}$, 使得 $f(b_i) = g(b_i), i = 1, 2, \dots, n+1$, 则 $f(x), g(x)$ 作为多项式相等。

多项式相等与多项式函数相等

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$,

多项式相等与多项式函数相等

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$,

- $f(x), g(x)$ 作为多项式相等：次数和各次项系数相等

多项式相等与多项式函数相等

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$,

- $f(x), g(x)$ 作为多项式相等：次数和各次项系数相等
- $f(x), g(x)$ 作为多项式函数相等：对任意 $b \in \mathbb{F}$, 有 $f(b) = g(b)$

多项式相等与多项式函数相等

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$,

- $f(x), g(x)$ 作为多项式相等：次数和各次项系数相等
- $f(x), g(x)$ 作为多项式函数相等：对任意 $b \in \mathbb{F}$, 有 $f(b) = g(b)$

定理 3.2

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 则 $f(x), g(x)$ 作为多项式相等当且仅当 $f(x), g(x)$ 作为多项式函数相等。

例子

例 6

$\sin x$ 不是多项式。

例子

例 6

$\sin x$ 不是多项式。

例 7

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\deg f(x) > 0$, $m \geq 2$ 是正整数。又若 $f(x) | f(x^m)$, 则 $f(x)$ 的根或为 0 或为单位根。

根的重数

定义 3.2

$b \in \mathbb{F}$, 若 $(x - b)^k | f(x)$, 但 $(x - b)^{k+1} \nmid f(x)$, 则称 b 为 $f(x)$ 的一个 k 重根。

根的重数

定义 3.2

$b \in \mathbb{F}$, 若 $(x-b)^k | f(x)$, 但 $(x-b)^{k+1} \nmid f(x)$, 则称 b 为 $f(x)$ 的一个 k 重根。若 $k=1$, 则称 b 为单根。

根的重数

定义 3.2

$b \in \mathbb{F}$, 若 $(x-b)^k | f(x)$, 但 $(x-b)^{k+1} \nmid f(x)$, 则称 b 为 $f(x)$ 的一个 k 重根。若 $k=1$, 则称 b 为单根。若 $k>1$, 则称 b 为重根。

根的重数

定义 3.2

$b \in \mathbb{F}$, 若 $(x-b)^k | f(x)$, 但 $(x-b)^{k+1} \nmid f(x)$, 则称 b 为 $f(x)$ 的一个 k 重根。若 $k=1$, 则称 b 为单根。若 $k>1$, 则称 b 为重根。

- $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上有重根, 则在 $\mathbb{F}$ 上必有重因式;

根的重数

定义 3.2

$b \in \mathbb{F}$, 若 $(x-b)^k | f(x)$, 但 $(x-b)^{k+1} \nmid f(x)$, 则称 b 为 $f(x)$ 的一个 k 重根。若 $k=1$, 则称 b 为单根。若 $k>1$, 则称 b 为重根。

- $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上有重根, 则在 $\mathbb{F}$ 上必有重因式; 反之如何?

根的重数

定义 3.2

$b \in \mathbb{F}$, 若 $(x-b)^k | f(x)$, 但 $(x-b)^{k+1} \nmid f(x)$, 则称 b 为 $f(x)$ 的一个 k 重根。若 $k=1$, 则称 b 为单根。若 $k>1$, 则称 b 为重根。

- $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上有重根, 则在 $\mathbb{F}$ 上必有重因式; 反之如何?

定理 3.3

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) = n > 0$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 内至多有 n 个根 (重根按重数计)。

例子

例 8

设 b 是 $f(x)$ 的 k 重根, 则 b 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根。反之未必。

例子

例 8

设 b 是 $f(x)$ 的 k 重根, 则 b 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根。反之未必。

例 9

设 b 是 $(f(x), f'(x))$ 的 $k-1$ 重根 ($k > 1$), 则 b 必是 $f(x)$ 的 k 重根。

例子

例 8

设 b 是 $f(x)$ 的 k 重根, 则 b 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根。反之未必。

例 9

设 b 是 $(f(x), f'(x))$ 的 $k-1$ 重根 ($k > 1$), 则 b 必是 $f(x)$ 的 k 重根。

例 10

$p(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约, 则必在复数域上无重根。

例子

例 11

$f(x), p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上多项式, $p(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约, 且 $f(x)$ 与 $p(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有公共根, 则 $p(x) | f(x)$ 。

例子

例 11

$f(x), p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上多项式, $p(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约, 且 $f(x)$ 与 $p(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有公共根, 则 $p(x) | f(x)$ 。

例 12

$f(x) \in \mathbb{R}[x]$, 若 $a + bi (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$ 是 $f(x)$ 的根, 证明: $a - bi$ 也是 $f(x)$ 的根。

例子

例 11

$f(x), p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上多项式, $p(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约, 且 $f(x)$ 与 $p(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有公共根, 则 $p(x)|f(x)$ 。

例 12

$f(x) \in \mathbb{R}[x]$, 若 $a + bi (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$ 是 $f(x)$ 的根, 证明: $a - bi$ 也是 $f(x)$ 的根。

例 13

$f(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$, m, n, p 是正整数, 则

$$x^2 + x + 1 | x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}.$$