

§ 1.4 标准分解式

高等代数 <https://gdfzu.club>

提纲

① 不可约多项式

② 因式分解基本定理

问题的引入

- $x^4 - 4$ 的因式分解?

问题的引入

- $x^4 - 4$ 的因式分解?

$$x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2) \quad (\text{在 } \mathbb{Q} \text{ 上})$$

问题的引入

- $x^4 - 4$ 的因式分解?

$$\begin{aligned}x^4 - 4 &= (x^2 - 2)(x^2 + 2) && \text{(在 } \mathbb{Q} \text{ 上)} \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2) && \text{(在 } \mathbb{R} \text{ 上)}\end{aligned}$$

问题的引入

- $x^4 - 4$ 的因式分解?

$$\begin{aligned}x^4 - 4 &= (x^2 - 2)(x^2 + 2) && \text{(在 } \mathbb{Q} \text{ 上)} \\&= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2) && \text{(在 } \mathbb{R} \text{ 上)} \\&= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) && \text{(在 } \mathbb{C} \text{ 上)}\end{aligned}$$

问题的引入

- $x^4 - 4$ 的因式分解?

$$\begin{aligned}x^4 - 4 &= (x^2 - 2)(x^2 + 2) && \text{(在 } \mathbb{Q} \text{ 上)} \\&= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2) && \text{(在 } \mathbb{R} \text{ 上)} \\&= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) && \text{(在 } \mathbb{C} \text{ 上)}\end{aligned}$$

- 因式分解与多项式系数所在数域有关。

不可约多项式

定义 1.1

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) \geq 1$, 若 $f(x)$ 能表为两个次数较小的多项式之积, 则称 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上可约多项式, 否则称为 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式。

不可约多项式

定义 1.1

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) \geq 1$, 若 $f(x)$ 能表为两个次数较小的多项式之积, 则称 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上可约多项式, 否则称为 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式。

- $\mathbb{F}$ 上不可约多项式 $f(x)$ 的因式只能是 $\mathbb{F}$ 上非零常数 c 及 $cf(x)$ 。

不可约多项式

定义 1.1

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) \geq 1$, 若 $f(x)$ 能表为两个次数较小的多项式之积, 则称 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上可约多项式, 否则称为 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式。

- $\mathbb{F}$ 上不可约多项式 $f(x)$ 的因式只能是 $\mathbb{F}$ 上非零常数 c 及 $cf(x)$ 。
- 一次多项式总是不可约多项式。

不可约多项式

定义 1.1

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) \geq 1$, 若 $f(x)$ 能表为两个次数较小的多项式之积, 则称 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上可约多项式, 否则称为 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式。

- $\mathbb{F}$ 上不可约多项式 $f(x)$ 的因式只能是 $\mathbb{F}$ 上非零常数 c 及 $cf(x)$ 。
- 一次多项式总是不可约多项式。
- (不) 可约多项式前提是次数大等于 1。

不可约多项式

定义 1.1

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) \geq 1$, 若 $f(x)$ 能表为两个次数较小的多项式之积, 则称 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上可约多项式, 否则称为 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式。

- $\mathbb{F}$ 上不可约多项式 $f(x)$ 的因式只能是 $\mathbb{F}$ 上非零常数 c 及 $cf(x)$ 。
- 一次多项式总是不可约多项式。
- (不) 可约多项式前提是次数大等于 1。
- 一个多项式是否不可约依赖于系数域。

多项式的分类

- **问题：**数域 $\mathbb{F}$ 上不是不可约的多项式是否必是可约多项式？

$$\mathbb{F}\text{上多项式} \left\{ \begin{array}{l} \text{常值多项式} \\ \text{次数大于 } 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ 多项式} \\ 0 \text{ 次多项式} \\ \text{不可约多项式} \\ \text{可约多项式} \end{array} \right.$$

多项式的分类

- **问题：**数域 $\mathbb{F}$ 上不是不可约的多项式是否必是可约多项式？

$$\mathbb{F}\text{上多项式} \left\{ \begin{array}{l} \text{常值多项式} \\ \text{次数大于 } 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ 多项式} \\ 0 \text{ 次多项式} \\ \text{不可约多项式} \\ \text{可约多项式} \end{array} \right.$$

例 1

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $a \in \mathbb{F}$, 令 $y = x - a$, 得 $g(y) = f(y + a)$ 。证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上可约 $\Leftrightarrow g(y)$ 在 $\mathbb{F}$ 上可约。

不可约多项式的性质

命题 1.1

设 $f(x)$, $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上多项式, 且 $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式, 则
或者 $(p(x), f(x)) = 1$ 或者 $p(x) | f(x)$ 。

不可约多项式的性质

命题 1.1

设 $f(x)$, $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上多项式, 且 $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式, 则
或者 $(p(x), f(x)) = 1$ 或者 $p(x) | f(x)$ 。

命题 1.2

设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上多项式, $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式, 且
 $p(x) | f(x)g(x)$, 则
或者 $p(x) | f(x)$ 或者 $p(x) | g(x)$ 。

不可约多项式的性质

命题 1.1

设 $f(x)$, $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上多项式, 且 $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式, 则
或者 $(p(x), f(x)) = 1$ 或者 $p(x) | f(x)$ 。

命题 1.2

设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上多项式, $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式, 且
 $p(x) | f(x)g(x)$, 则
或者 $p(x) | f(x)$ 或者 $p(x) | g(x)$ 。

- 命题中 $p(x)$ 不可约是重要的;

不可约多项式的性质

命题 1.1

设 $f(x)$, $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上多项式, 且 $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式, 则
或者 $(p(x), f(x)) = 1$ 或者 $p(x) | f(x)$ 。

命题 1.2

设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上多项式, $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式, 且
 $p(x) | f(x)g(x)$, 则
或者 $p(x) | f(x)$ 或者 $p(x) | g(x)$ 。

- 命题中 $p(x)$ **不可约** 是重要的;
- 命题1.2中不可约多项式 $p(x)$ 若既不整除 $f(x)$, 也不整除 $g(x)$, 则 $p(x)$ 不整除 $f(x)g(x)$ 。

不可约多项式的性质

推论 1.1

设 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式, 若

$$p(x) \mid f_1(x)f_2(x) \cdots f_m(x),$$

则存在 i , $1 \leq i \leq m$, 使得

$$p(x) \mid f_i(x)$$

不可约多项式的性质

- **命题1.1的逆命题** 设 $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\deg p(x) > 0$, 满足以下性质: 对任意 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 或者 $(f(x), p(x)) = 1$ 或者 $p(x) | f(x)$, 则 $p(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约。

不可约多项式的性质

- **命题1.1的逆命题** 设 $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\deg p(x) > 0$, 满足以下性质: 对任意 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 或者 $(f(x), p(x)) = 1$ 或者 $p(x) | f(x)$, 则 $p(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约。
- **命题1.2的逆命题** 设 $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\deg p(x) > 0$, 满足以下性质: 对任意 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 如果 $p(x) | f(x)g(x)$ 必有 $p(x) | f(x)$ 或者 $p(x) | g(x)$, 则 $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式。

不可约多项式的性质

- **命题1.1的逆命题** 设 $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\deg p(x) > 0$, 满足以下性质: 对任意 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 或者 $(f(x), p(x)) = 1$ 或者 $p(x) | f(x)$, 则 $p(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约。
- **命题1.2的逆命题** 设 $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\deg p(x) > 0$, 满足以下性质: 对任意 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 如果 $p(x) | f(x)g(x)$ 必有 $p(x) | f(x)$ 或者 $p(x) | g(x)$, 则 $p(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式。
- 通过 $p(x)$ 与 $\mathbb{F}$ 上任一个多项式或任意两个多项式的关系可判定 $p(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上是否不可约。

提纲

1 不可约多项式

2 因式分解基本定理

因式分解基本定理

定理 2.1 (多项式唯一分解定理)

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) \geq 1$, 则

因式分解基本定理

定理 2.1 (多项式唯一分解定理)

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) \geq 1$, 则

- ① $f(x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x)$, 其中 $p_i(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式 ($i = 1, 2, \dots, s$);

因式分解基本定理

定理 2.1 (多项式唯一分解定理)

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) \geq 1$, 则

- ① $f(x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x)$, 其中 $p_i(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式 ($i = 1, 2, \dots, s$);
- ② 若 $f(x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x) \cdots q_t(x)$, 其中 $p_i(x)$, $q_j(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约 ($i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, t$), 则必有 $s = t$, 且经过适当调换因式顺序 $p_i(x)$ 与 $q_i(x)$ 相伴 ($i = 1, 2, \dots, s$)。

因式分解基本定理

定理 2.1 (多项式唯一分解定理)

设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $\deg f(x) \geq 1$, 则

- ① $f(x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x)$, 其中 $p_i(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式 ($i = 1, 2, \dots, s$);
- ② 若 $f(x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x) \cdots q_t(x)$, 其中 $p_i(x)$, $q_j(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约 ($i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, t$), 则必有 $s = t$, 且经过适当调换因式顺序 $p_i(x)$ 与 $q_i(x)$ 相伴 ($i = 1, 2, \dots, s$)。

- 多项式的**标准分解式**: 设 $\deg f(x) \geq 1$, 则

$$f(x) = cp_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x) \cdots p_m^{e_m}(x)$$

其中 $p_i(x)$ 是首一的**两两互素不可约多项式**,
 $e_i \geq 1 (i = 1, 2, \dots, m)$ 。

例子

例 2

分别求多项式 $f(x) = 6(x^8 - 4x^4 + 4)$ 分别在 $\mathbb{Q}$ 、 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 上的多项式的标准分解式。

例子

例 2

分别求多项式 $f(x) = 6(x^8 - 4x^4 + 4)$ 分别在 $\mathbb{Q}$ 、 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 上的多项式的标准分解式。

例 3

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 证明 $(f(x), g(x)) \neq 1$ 的充要条件是存在 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式 $p(x)$, 使得

$$p(x) \mid f(x) + g(x), \quad p(x) \mid f(x)g(x).$$

例 4

设

$$f(x) = p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x) \cdots p_m^{a_m}(x), \quad g(x) = p_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x) \cdots p_m^{b_m}(x),$$

其中 $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $a_i + b_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $p_i(x)$ 是首一的两两互素不可约多项式, 则

例 4

设

$$f(x) = p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x) \cdots p_m^{a_m}(x), \quad g(x) = p_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x) \cdots p_m^{b_m}(x),$$

其中 $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $a_i + b_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $p_i(x)$ 是首一的两两互素不可约多项式, 则

$$\textcircled{1} \quad f(x)g(x) = p_1^{c_1}(x)p_2^{c_2}(x) \cdots p_m^{c_m}(x), \quad c_i = a_i + b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

例 4

设

$$f(x) = p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x) \cdots p_m^{a_m}(x), \quad g(x) = p_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x) \cdots p_m^{b_m}(x),$$

其中 $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $a_i + b_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $p_i(x)$ 是首一的两两互素不可约多项式, 则

- ① $f(x)g(x) = p_1^{c_1}(x)p_2^{c_2}(x) \cdots p_m^{c_m}(x)$, $c_i = a_i + b_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$);
- ② $f(x)|g(x) \Leftrightarrow a_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$);

例 4

设

$$f(x) = p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x) \cdots p_m^{a_m}(x), \quad g(x) = p_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x) \cdots p_m^{b_m}(x),$$

其中 $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $a_i + b_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $p_i(x)$ 是首一的两两互素不可约多项式, 则

- ① $f(x)g(x) = p_1^{c_1}(x)p_2^{c_2}(x) \cdots p_m^{c_m}(x)$, $c_i = a_i + b_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$);
- ② $f(x)|g(x) \Leftrightarrow a_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$);
- ③ $(f(x), g(x)) = p_1^{d_1}(x)p_2^{d_2}(x) \cdots p_m^{d_m}(x)$, $d_i = \min\{a_i, b_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, m$);

例 4

设

$$f(x) = p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x) \cdots p_m^{a_m}(x), \quad g(x) = p_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x) \cdots p_m^{b_m}(x),$$

其中 $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $a_i + b_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $p_i(x)$ 是首一的两两互素不可约多项式, 则

- ① $f(x)g(x) = p_1^{c_1}(x)p_2^{c_2}(x) \cdots p_m^{c_m}(x)$, $c_i = a_i + b_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$);
- ② $f(x)|g(x) \Leftrightarrow a_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$);
- ③ $(f(x), g(x)) = p_1^{d_1}(x)p_2^{d_2}(x) \cdots p_m^{d_m}(x)$, $d_i = \min\{a_i, b_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, m$);
- ④ $[f(x), g(x)] = p_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x) \cdots p_m^{e_m}(x)$, $e_i = \max\{a_i, b_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, m$);

例 4

设

$$f(x) = p_1^{a_1}(x)p_2^{a_2}(x) \cdots p_m^{a_m}(x), \quad g(x) = p_1^{b_1}(x)p_2^{b_2}(x) \cdots p_m^{b_m}(x),$$

其中 $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $a_i + b_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $p_i(x)$ 是首一的两两互素不可约多项式, 则

- ① $f(x)g(x) = p_1^{c_1}(x)p_2^{c_2}(x) \cdots p_m^{c_m}(x)$, $c_i = a_i + b_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$);
- ② $f(x)|g(x) \Leftrightarrow a_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$);
- ③ $(f(x), g(x)) = p_1^{d_1}(x)p_2^{d_2}(x) \cdots p_m^{d_m}(x)$, $d_i = \min\{a_i, b_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, m$);
- ④ $[f(x), g(x)] = p_1^{e_1}(x)p_2^{e_2}(x) \cdots p_m^{e_m}(x)$, $e_i = \max\{a_i, b_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, m$);
- ⑤ $f(x), g(x) = f(x)g(x)$.