第一章 多项式

§1.1 一元多项式的定义和基本性质

高等代数 https://gdfzu.club

常用符号

- $\forall$ — **任意**（Arbitrary）

常用符号

- $\forall$ — **任意**（Arbitrary）
- $\exists$ — **存在**（Exist）

常用符号

- $\forall$ — 任意（Arbitrary）
- $\exists$ — 存在（Exist）

- $\mathbb{N}$ — 自然数集（Natural numbers）

常用符号

- $\forall$ — 任意（ Arbitrary ）
- $\exists$ — 存在（ Exist ）
- $\mathbb{N}$ — 自然数集（ Natural numbers ）
- $\mathbb{Z}$ — 整数集 (Zahlen 德文)

常用符号

- $\forall$ — 任意（ Arbitrary ）
- $\exists$ — 存在（ Exist ）
- $\mathbb{N}$ — 自然数集（ Natural numbers ）
- $\mathbb{Z}$ — 整数集 (Zahlen 德文)
- $\mathbb{Q}$ — 有理数集 (Quotient) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$

常用符号

- $\forall$ — 任意（ Arbitrary ）
- $\exists$ — 存在（ Exist ）
- $\mathbb{N}$ — 自然数集（ Natural numbers ）
- $\mathbb{Z}$ — 整数集 (Zahlen 德文)
- $\mathbb{Q}$ — 有理数集 (Quotient) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$
- $\mathbb{R}$ — 实数集（ Real numbers ）

常用符号

- $\forall$ — 任意（ Arbitrary ）
- $\exists$ — 存在（ Exist ）

- $\mathbb{N}$ — 自然数集（ Natural numbers ）

- $\mathbb{Z}$ — 整数集 (Zahlen 德文)

- $\mathbb{Q}$ — 有理数集 (Quotient) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$

- $\mathbb{R}$ — 实数集（ Real numbers ）

- $\mathbb{C}$ — 复数集（ Complex numbers ）

Outline

数域

- 数域：$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$

数域

- **数域：** $\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$

定义 1.1

若集合 $\mathbb{F}$ 中任意两个数作某一运算后的结果仍然在 $\mathbb{F}$ 中，则称 $\mathbb{F}$ 关于这个运算封闭。

数域

- **数域**：$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$

定义 1.1

若集合 $\mathbb{F}$ 中任意两个数作某一运算后的结果仍然在 $\mathbb{F}$ 中，则称 $\mathbb{F}$ 关于这个运算封闭。

定义 1.2

设 $\mathbb{F}$ 是复数集 $\mathbb{C}$ 的子集，若其满足下列条件：

则称 $\mathbb{F}$ 是一个数域。

数域

- **数域**：$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$

定义 1.1

若集合 $\mathbb{F}$ 中任意两个数作某一运算后的结果仍然在 $\mathbb{F}$ 中，则称 $\mathbb{F}$ 关于这个运算封闭。

定义 1.2

设 $\mathbb{F}$ 是复数集 $\mathbb{C}$ 的子集，若其满足下列条件：

1. 至少包含 0 和 1；

则称 $\mathbb{F}$ 是一个数域。

数域

- 数域：$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$

定义 1.1

若集合 $\mathbb{F}$ 中任意两个数作某一运算后的结果仍然在 $\mathbb{F}$ 中，则称 $\mathbb{F}$ 关于这个运算封闭。

定义 1.2

设 $\mathbb{F}$ 是复数集 $\mathbb{C}$ 的子集，若其满足下列条件：

1. 至少包含 0 和 1;
2. 该集合关于通常数的加、减、乘、除运算封闭;

则称 $\mathbb{F}$ 是一个数域。

数域

- **数域**：$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$

定义 1.1

若集合 $\mathbb{F}$ 中任意两个数作某一运算后的结果仍然在 $\mathbb{F}$ 中，则称 $\mathbb{F}$ 关于这个运算封闭。

定义 1.2

设 $\mathbb{F}$ 是复数集 $\mathbb{C}$ 的子集，若其满足下列条件：

1. 至少包含 0 和 1；
2. 该集合关于通常数的加、减、乘、除运算封闭；

则称 $\mathbb{F}$ 是一个数域。

- **注** 若数集只对加、减、乘封闭，称为数环。

数域

1. 自然数集 $\mathbb{N}$

数域

1. 自然数集 $\mathbb{N}$既不是数环，也不是数域。

数域

1. 自然数集 $\mathbb{N}$既不是数环，也不是数域。
   整数集 $\mathbb{Z}$

数域

1. 自然数集 $\mathbb{N}$既不是数环，也不是数域。
   整数集 $\mathbb{Z}$是数环，不是数域。

数域

1. 自然数集 $\mathbb{N}$既不是数环，也不是数域。
   整数集 $\mathbb{Z}$是数环，不是数域。

2. 有理数域 $\mathbb{Q}$；实数域 $\mathbb{R}$；复数域 $\mathbb{C}$。

数域

1. 自然数集 $\mathbb{N}$既不是数环，也不是数域。
   整数集 $\mathbb{Z}$是数环，不是数域。

2. 有理数域 $\mathbb{Q}$；实数域 $\mathbb{R}$；复数域 $\mathbb{C}$。

例 1.1 (新数域)

下面的集合哪些是数域，哪些不是？说明理由。

数域

1. 自然数集 $\mathbb{N}$既不是数环，也不是数域。
   整数集 $\mathbb{Z}$是数环，不是数域。

2. 有理数域 $\mathbb{Q}$；实数域 $\mathbb{R}$；复数域 $\mathbb{C}$。

例 1.1 (新数域)

下面的集合哪些是数域，哪些不是？说明理由。

- $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}|a,\ b\in\mathbb{Q}\}$

数域

1. **自然数集 $\mathbb{N}$既不是数环，也不是数域。**
   整数集 $\mathbb{Z}$是数环，不是数域。

2. **有理数域 $\mathbb{Q}$；实数域 $\mathbb{R}$；复数域 $\mathbb{C}$。**

例 1.1 (新数域)

下面的集合哪些是数域，哪些不是？说明理由。

- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a,\ b \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a,\ b \in \mathbb{Z}\}$
  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} | a,\ b \in \mathbb{Q}\}$

有理数域的特殊性

命题 1.1

任一数域必包含有理数域 $\mathbb{Q}$。

Outline

一元多项式

定义 2.1

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域，x 是一个符号（可以理解为变量，也称为 $\mathbb{F}$ 上的**未定元**），$a_i \in \mathbb{F}$，$i = 0, \ldots, n$，$n \in \mathbb{Z}^+$，称

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

为 $\mathbb{F}$ 上关于 x 的**一元多项式**。

一元多项式

定义 2.1

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域，x 是一个符号（可以理解为变量，也称为 $\mathbb{F}$ 上的**未定元**），$a_i \in \mathbb{F}$，$i = 0, \ldots, n$，$n \in \mathbb{Z}^+$，称

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

为 $\mathbb{F}$ 上关于 x 的**一元多项式**。

- $a_i x^i$：第 i 次项，a_i：第 i 次项系数；

一元多项式

定义 2.1

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域，x 是一个符号（可以理解为变量，也称为 $\mathbb{F}$ 上的**未定元**），$a_i \in \mathbb{F}$，$i = 0, \ldots, n$，$n \in \mathbb{Z}^+$，称

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

为 $\mathbb{F}$ 上关于 x 的**一元多项式**。

- $a_i x^i$：第 i 次项，a_i：第 i 次项系数；
- 当 $a_n \neq 0$ 时，称 $f(x)$ 为 n **次多项式**；多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\deg f(x)$；

一元多项式

定义 2.1

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域，x 是一个符号（可以理解为变量，也称为 $\mathbb{F}$ 上的**未定元**），$a_i \in \mathbb{F}$，$i = 0, \ldots, n$，$n \in \mathbb{Z}^+$，称

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

为 $\mathbb{F}$ 上关于 x 的**一元多项式**。

- $a_i x^i$：第 i 次项，a_i：第 i 次项系数；
- 当$a_n \neq 0$时，称 $f(x)$ 为n 次多项式；多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\deg f(x)$；
- $a_n x^n$：首项；a_n：首项系数；a_0：常数项；

一元多项式

定义 2.1

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域，x 是一个符号（可以理解为变量，也称为 $\mathbb{F}$ 上的**未定元**），$a_i \in \mathbb{F}$，$i = 0, \ldots, n$，$n \in \mathbb{Z}^+$，称

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

为 $\mathbb{F}$ 上关于 x 的**一元多项式**。

- $a_i x^i$：第 i 次项，a_i：第 i 次项系数；
- 当$a_n \neq 0$时，称 $f(x)$ 为n **次多项式**；多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\deg f(x)$；
- $a_n x^n$：首项；a_n：首项系数；a_0：常数项；
- 当 $a_n = 1$ 时，$f(x)$ 称为**首一多项式**。

一元多项式

定义 2.1

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域，x 是一个符号（可以理解为变量，也称为 $\mathbb{F}$ 上的**未定元**），$a_i \in \mathbb{F}$，$i = 0, \ldots, n$，$n \in \mathbb{Z}^+$，称

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

为 $\mathbb{F}$ 上关于 x 的**一元多项式**。

- $a_i x^i$：第 i 次项，a_i：第 i 次项系数；
- 当 $a_n \neq 0$ 时，称 $f(x)$ 为 n **次多项式**；多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\deg f(x)$；
- $a_n x^n$：首项；a_n：首项系数；a_0：常数项；
- 当 $a_n = 1$ 时，$f(x)$ 称为**首一多项式**。
- $\mathbb{F}$ 上一元多项式全体记为 $\mathbb{F}[x]$。

一元多项式

- **常数项多项式：** $f(x) = a_0$，$a_0 \in \mathbb{F}$

一元多项式

- 常数项多项式：$f(x) = a_0$，$a_0 \in \mathbb{F}$
- 零多项式：$f(x) = 0$，

一元多项式

- 常数项多项式：$f(x) = a_0$，$a_0 \in \mathbb{F}$
- 零多项式：$f(x) = 0$，
- 约定 $\deg(0) = -\infty$；

一元多项式

- 常数项多项式：$f(x) = a_0$，$a_0 \in \mathbb{F}$
- 零多项式：$f(x) = 0$，
- 约定 $\deg(0) = -\infty$；
- 零次多项式：$f(x) = a_0 \neq 0$；

一元多项式

- 常数项多项式：$f(x) = a_0$，$a_0 \in \mathbb{F}$
- 零多项式：$f(x) = 0$，
- 约定 $\deg(0) = -\infty$；
- 零次多项式：$f(x) = a_0 \neq 0$；
- $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 首项系数非零 $\Leftrightarrow \deg f(x) \geq 0$。

一元多项式

- 常数项多项式：$f(x) = a_0$，$a_0 \in \mathbb{F}$
- 零多项式：$f(x) = 0$，
- 约定 $\deg(0) = -\infty$；
- 零次多项式：$f(x) = a_0 \neq 0$；
- $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 首项系数非零 $\Leftrightarrow \deg f(x) \geq 0$。

例 2.1

$$\sqrt{-1}, \quad \pi x^2, \quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i, \quad x^{2/3}, \quad \frac{x^2+1}{x-1}$$

多项式与整数

- 多项式的系数表示：$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$；

多项式与整数

- **多项式的系数表示：** $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$；
- Matlab **中表示多项式的方法。**

多项式与整数

- **多项式的系数表示：** $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$；
- Matlab **中表示多项式的方法。**
- **整数与多项式的系数表示：**

$$314159 = 3 \times 10^5 + 1 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 5 \times 10 + 9.$$

多项式与整数

- 多项式的系数表示：$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$；
- Matlab 中表示多项式的方法。
- 整数与多项式的系数表示：

$$314159 = 3 \times 10^5 + 1 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 5 \times 10 + 9.$$

- 整数与多项式有很多相似性质，如加法、乘法、带余除法、素因子分解/因式分解等；

多项式与整数

- 多项式的系数表示：$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$；
- Matlab 中表示多项式的方法。
- 整数与多项式的系数表示：

$$314159 = 3\times 10^5 + 1\times 10^4 + 4\times 10^3 + 1\times 10^2 + 5\times 10 + 9.$$

- 整数与多项式有很多相似性质，如加法、乘法、带余除法、素因子分解/因式分解等；
- 注：进一步解释见抽象代数。

多项式函数定义

定义 2.2

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，对任意 $b\in\mathbb{F}$，将 $f(x)$ 表示式里的 x 用 b 代替，得到 $\mathbb{F}$ 中的数

$$a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1b+a_0,$$

称为当 $x=b$ 时 $f(x)$ 的值，记作 $f(b)$。

$$f:b\mapsto f(b)$$

定义了数域 $\mathbb{F}$ 上的函数 $f(x)$，称 $f(x)$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式函数。

Outline

多项式的相等

定义 3.1

两个多项式称为**相等**当且仅当它们的次数相同且各次项的系数相等，即若

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0, \end{aligned}$$

则 $f(x) = g(x)$ 当且仅当 $m = n$，$a_i = b_i$，$i = 0, \ldots, n$。

多项式的相等

定义 3.1

两个多项式称为**相等**当且仅当它们的次数相同且各次项的系数相等，即若

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0, \end{aligned}$$

则 $f(x) = g(x)$ 当且仅当 $m = n$，$a_i = b_i$，$i = 0, \ldots, n$。

- 表达式相同$\Rightarrow$函数相同；

多项式的相等

定义 3.1

两个多项式称为**相等**当且仅当它们的次数相同且各次项的系数相等，即若

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0, \end{aligned}$$

则 $f(x) = g(x)$ 当且仅当 $m = n$，$a_i = b_i$，$i = 0, \ldots, n$。

- 表达式相同$\Rightarrow$函数相同;
- 函数相同? $\Rightarrow$表达式相同?

多项式的相等

定义 3.1

两个多项式称为**相等**当且仅当它们的次数相同且各次项的系数相等，即若

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0, \end{aligned}$$

则 $f(x) = g(x)$ 当且仅当 $m = n$，$a_i = b_i$，$i = 0, \ldots, n$。

- 表达式相同$\Rightarrow$函数相同；
- 函数相同? $\Rightarrow$表达式相同?
- 多项式表达式相同 $\Leftrightarrow$ 多项式函数相等。（待证明）

多项式的加法运算

定义 3.2

设

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \\
g(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0
\end{aligned}
$$

定义多项式加法

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 + b_0)$$

加法运算性质

1. 结合律：$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$；

加法运算性质

1. 结合律：$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$；
2. 交换律：$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$；

加法运算性质

1. 结合律：$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$；
2. 交换律：$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$；
3. 存在零元：$f(x)+0=f(x)$；

加法运算性质

1. 结合律：$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$；
2. 交换律：$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$；
3. 存在零元：$f(x)+0=f(x)$；
4. 存在负元：$f(x)+(-f(x))=0$，其中

$$-f(x)=\sum_{i=0}^{n}-a_ix^i.$$

定义 3.3

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{F}[x];\\
g(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \in \mathbb{F}[x],
\end{aligned}
$$

定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**乘积**：$f(x)g(x) = h(x)$，其中

$$
\begin{aligned}
h(x) &= c_{n+m}x^{n+m} + c_{n+m-1}x^{n+m-1} + \cdots + c_0\\
c_{n+m} &= a_n b_m\\
c_{n+m-1} &= a_n b_{m-1} + a_{n-1}b_m\\
&\cdots\\
c_k &= \sum_{i+j=k} a_i b_j = a_k b_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k\\
&\cdots\\
c_0 &= a_0 b_0
\end{aligned}
$$

多项式的数乘

定义 3.4

设 $c \in \mathbb{F}$，$f(x) \in \mathbb{F}[x]$,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

c 与 $f(x)$ 乘积

$$cf(x) = ca_n x^n + ca_{n-1} x^{n-1} + \cdots + ca_0,$$

也称为 c 与 $f(x)$ **数乘**。

多项式乘法性质

1. 结合律：$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$；

多项式乘法性质

1. 结合律：$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$；
2. 交换律：$f(x)g(x) = g(x)f(x)$；

多项式乘法性质

1. 结合律：$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$；
2. 交换律：$f(x)g(x) = g(x)f(x)$；
3. 分配律：$(f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$；

多项式乘法性质

1. 结合律：$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$；
2. 交换律：$f(x)g(x) = g(x)f(x)$；
3. 分配律：$(f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$；
4. 数乘与乘法协调：$c(f(x)g(x)) = (cf(x))g(x) = f(x)(cg(x))$；

多项式乘法性质

1. 结合律：$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$；
2. 交换律：$f(x)g(x) = g(x)f(x)$；
3. 分配律：$(f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$；
4. 数乘与乘法协调：$c(f(x)g(x)) = (cf(x))g(x) = f(x)(cg(x))$；
5. $1 \cdot f(x) = f(x)$。

多项式的次数

- **约定：对于任意的** $n \in \mathbb{N}$，

  $(1) -\infty < n; \quad (2). -\infty + n = -\infty; \quad (3).(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$

多项式的次数

- **约定：对于任意的** $n \in \mathbb{N}$，

  $(1) -\infty < n;\quad (2). -\infty + n = -\infty;\quad (3).(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$

命题 3.1

设 $f(x)$、$g(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上多项式，则

$$\begin{aligned} \deg(f(x)+g(x)) &\leq \max\{\deg f(x),\ \deg g(x)\} \\ \deg(cf(x)) &= \deg f(x), \quad 0 \neq c \in \mathbb{F} \\ \deg(f(x)g(x)) &= \deg f(x) + \deg g(x) \end{aligned}$$

多项式的次数

- 约定：对于任意的 $n \in \mathbb{N}$，

$$(1) -\infty < n; \quad (2). -\infty + n = -\infty; \quad (3).(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

命题 3.1

设 $f(x)$、$g(x)$ 是 $\mathbb{F}$ 上多项式，则

$$\begin{aligned} \deg(f(x)+g(x)) &\leq \max\{\deg f(x),\ \deg g(x)\} \\ \deg(cf(x)) &= \deg f(x), \quad 0 \neq c \in \mathbb{F} \\ \deg(f(x)g(x)) &= \deg f(x) + \deg g(x) \end{aligned}$$

- 特殊情况：

$$\begin{aligned} & \deg(f(x)g(x)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \deg f(x) = 0, \deg g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & f(x) = a_0 \neq 0, g(x) = b_0 \neq 0 \end{aligned}$$

多项式的消去律

推论 3.1

$f(x)$、$g(x) \in \mathbb{F}[x]$。$f(x) \neq 0$，$g(x) \neq 0$，则

$$f(x)g(x) \neq 0.$$

多项式的消去律

推论 3.1

$f(x)$、$g(x) \in \mathbb{F}[x]$。$f(x) \neq 0$，$g(x) \neq 0$，则

$$f(x)g(x) \neq 0.$$

推论 3.2 (消去律)

若 $f(x) \neq 0$，$f(x)g(x) = f(x)h(x)$，则

$$g(x) = h(x).$$

多项式的消去律

推论 3.1

$f(x)$、$g(x) \in \mathbb{F}[x]$。$f(x) \neq 0$，$g(x) \neq 0$，则

$$f(x)g(x) \neq 0.$$

推论 3.2 (消去律)

若 $f(x) \neq 0$，$f(x)g(x) = f(x)h(x)$，则

$$g(x) = h(x).$$

例 3.1

$f(x)$、$g(x) \in \mathbb{R}[x]$。则 $f^2(x) + g^2(x) = 0$ 当且仅当 $f(x) = g(x) = 0$。