

高等代数习题集

分章分节 · 每节独立成页 · 留白作答

姓 名 _____

班 级 _____

学 号 _____

全 9 章 · 52 节 · 620 道课后习题

教材范围：多项式、线性方程组与矩阵、行列式、线性空间与线性映射、特征值与 Jordan 标准型、内积空间与二次型

目 录

第一章 多项式	第 5 页
1.1 一元多项式的定义和基本性质 (16 题)	006
1.2 带余除法与整除 (14 题)	012
1.3 最大公因式和辗转相除法 (18 题)	016
1.4 标准分解式 (10 题)	022
1.5 不可约因式的重数 (15 题)	026
1.6 复系数、实系数多项式的标准分解式 (14 题)	031
1.7 有理系数多项式的不可约因式 (14 题)	036
第二章 矩阵与初等变换——线性方程组的消元法求解	第 41 页
2.1 线性方程组、消元法及几何直观 (3 题)	042
2.2 矩阵及其运算 (33 题)	044
2.3 分块矩阵 (12 题)	056
2.4 行初等变换和初等矩阵 (8 题)	061
2.5 可逆矩阵 (14 题)	065
2.6 简化阶梯形、线性方程组的解及秩 (8 题)	069
2.7 列初等变换与相抵 (10 题)	072
第三章 行列式——线性方程组的公式解	第 76 页
3.1 行列式的展开式定义 (18 题)	077
3.2 行列式与初等变换 (15 题)	082
3.3 行列式按行(列)展开 (23 题)	088
3.4 Cramer法则 (5 题)	098
第四章 线性组合与列向量空间——线性方程组的列观点	第 100 页
4.1 列向量空间 $\mathbb{R}^m$ (8 题)	101
4.2 线性相关与线性无关 (14 题)	104
4.3 生成子空间、极大无关组与秩 (20 题)	110
4.4 $\mathbb{R}^m$ 的子空间、基与维数 (14 题)	117
4.5 线性方程组解的结构 (14 题)	123
第五章 标准内积空间——无解方程组的最小二乘解	第 128 页
5.1 标准内积及其几何意义 (8 题)	129

5.2 正交投影与最小二乘解 (9 题)	132
5.3 标准正交基与Gram-Schmidt正交化过程 (6 题)	136

第六章 一般线性空间与线性映射

第 139 页

6.1 一般线性空间的定义与举例 (8 题)	140
6.2 坐标与基变换 (8 题)	143
6.3 线性映射 (9 题)	147
6.4 线性映射的运算 (8 题)	150
6.5 同构映射与线性空间同构 (9 题)	153
6.6 线性映射的表示矩阵 (7 题)	156
6.7 线性映射的像与核 (12 题)	159
6.8 商空间与线性映射的结构 (6 题)	164

第七章 线性变换

第 166 页

7.1 线性变换与矩阵相似 (15 题)	167
7.2 不变子空间 (10 题)	173
7.3 特征值与特征向量 (18 题)	178
7.4 可对角化 (12 题)	184
7.5 零化多项式 (10 题)	188
7.6 λ -矩阵相抵与矩阵相似 (4 题)	191
7.7 λ -矩阵的相抵标准型 (9 题)	193
7.8 初等因子组与Jordan标准型 (19 题)	196
7.9 Jordan标准型与空间分解 (5 题)	202
7.10 Frobenius标准型和广义Jordan标准型 (7 题)	204

第八章 一般内积空间与线性映射

第 207 页

8.1 一般内积空间的定义和举例 (11 题)	208
8.2 标准正交基与内积空间同构 (11 题)	212
8.3 酉矩阵、正交矩阵与标准型 (12 题)	216
8.4 实对称矩阵和Hermite矩阵 (14 题)	220
8.5 奇异值分解——酉相抵标准型 (9 题)	224

第九章 二次型

第 227 页

9.1 二次型与矩阵合同 (10 题)	228
9.2 合同变换和惯性定理 (14 题)	232
9.3 正定二次型和正定矩阵 (20 题)	237

第一章

多项式

- 1.1 一元多项式的定义和基本性质 (16 题)
- 1.2 带余除法与整除 (14 题)
- 1.3 最大公因式和辗转相除法 (18 题)
- 1.4 标准分解式 (10 题)
- 1.5 不可约因式的重数 (15 题)
- 1.6 复系数、实系数多项式的标准分解式 (14 题)
- 1.7 有理系数多项式的不可约因式 (14 题)

1.1 一元多项式的定义和基本性质

课后练习 (1.1.5) · 共 16 题 · 基础题7题 · 提高题7题 · 挑战题2题

基础题

1. 证明: $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 是一个数域, 其中 i 是虚数单位。

2. 求包含 $\sqrt{3}$ 的最小数域, 并证明。

3. 设

$$f(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 5, g(x) = -4x^2 + 3x - 2,$$

求 $f(x) + g(x), f(x)g(x)$ 。

4. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 证明:

$$\begin{aligned}\deg (cf(x)) &= \deg f(x), \quad 0 \neq c \in \mathbb{F}, \\ \deg (f(x)g(x)) &= \deg f(x) + \deg g(x).\end{aligned}$$

5. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$, 证明:

$$f(x)g(x) \neq 0.$$

6. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 若 $f(x) \neq 0$ 且 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$, 证明:

$$g(x) = h(x).$$

7. 对任意非零多项式 $f(x)$, 证明: $\deg f(f(x)) = (\deg f(x))^2$ 。

提高题

8. 设数集 $\mathbb{F}$ 至少包含两个不同的数, 证明: 若 $\mathbb{F}$ 中任意两个数的差与商 (除数非零) 仍属于 $\mathbb{F}$, 则 $\mathbb{F}$ 是一个数域。

9. 设 $\mathbb{K}, \mathbb{F}$ 是数域,

1. 证明: $\mathbb{K} \cap \mathbb{F}$ 是一个数域;
2. 举例说明 $\mathbb{K} \cup \mathbb{F}$ 不一定是数域;
3. 试证: $\mathbb{K} \cup \mathbb{F}$ 是数域的充要条件是 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ 或 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ 。

10. 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域, 且 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$ 。证明: 或者 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, 或者 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, 二者必居其一。

11. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 证明:

$$\deg (f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}.$$

12. 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$, 满足 $x(f(x))^2 + x(g(x))^2 = (h(x))^2$. 证明:

$$f(x) = g(x) = h(x) = 0.$$

这个结论在复数域上成立否?若成立, 请证明; 若不成立, 请举例说明。

13. 设 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ 且 $f(x^2) = (f(x))^2$, 求 $f(x)$ 。

14. 设 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $k \in \mathbb{Z}^+$ 且 $f(f(x)) = (f(x))^k$, 求 $f(x)$ 。

挑战题

15. 用多项式的系数序列来表示多项式（不限定升序或降序排列），写一个函数实现多项式的乘法，并验证 练习 1.1.5.3 手算获得的结论是否正确。

16. 设 $\mathbb{F} = \{0, 1\}$, 在 $\mathbb{F}$ 上按如下方式定义加、减、乘、除 (除数不为 0) 四种运算:

$$0 + 0 = 0, \quad 1 + 1 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1;$$

$$0 - 0 = 0, \quad 1 - 1 = 0, \quad 0 - 1 = 1 - 0 = 1;$$

$$0 \times 0 = 0, \quad 1 \times 1 = 1, \quad 0 \times 1 = 1 \times 0 = 0;$$

$$0 \div 1 = 0, \quad 1 \div 1 = 1.$$

此时 $\mathbb{F}$ 称为二元域。

多项式的相关概念可以从数域推广到二元域上。请验证: 当 $\mathbb{F}$ 是二元域时, 取

$$f(x) = x \in \mathbb{F}[x], \quad g(x) = x^2 \in \mathbb{F}[x],$$

$f(x)$ 和 $g(x)$ 作为函数是同一个函数。

1.2 带余除法与整除

课后练习 (1.2.4) · 共 14 题 · 基础题7题 · 提高题7题

基础题

1. 设 $f(x) = 3x^4 + x^3 + x + 3$, $g(x) = 2x^2 + x + 1$, 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式和余式。

2. 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商与余式, 并思考对于除式为一次因式的带余除法是否有更简便的求解方式。
 1. $f(x) = x^5 + 2x^3 - 1$, $g(x) = x + 1$;
 2. $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 1$, $g(x) = 2x - 1$ 。

3. 设 $a, b \in \mathbb{F}$ 且 $a \neq b$, 证明: $(x - a)(x - b)$ 除 $f(x)$ 的余式是

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}x + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

4. 对任意正整数 n , 证明: $x - a \mid x^n - a^n$, 并求出商式。

5. 设 $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{F}[x]$, 其中 $f_1(x) \neq 0$ 且

$$g_1(x)g_2(x) \mid f_1(x)f_2(x), f_1(x) \mid g_1(x),$$

证明: $g_2(x) \mid f_2(x)$ 。

6. 求 a, b 的值, 使 $x^2 + x - 2 \mid x^4 + ax^2 + b$ 。

7. 证明:

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow [f(x)] = [g(x)].$$

提高题

8. 设 $f(x) = (x+1)^{k+n} + (2x)(x+1)^{k+n-1} + \cdots + (2x)^k(x+1)^n$, 这里 k, n 为非负整数。证明: $x^{k+1} \mid (x-1)f(x) + (x+1)^{k+n+1}$ 。

9. 设 $d, n \in \mathbb{Z}^+$, 证明: 在 $\mathbb{F}[x]$ 中, $x^d - 1 \mid x^n - 1$ 的充分必要条件是 $d \mid n$ 。

10. 设 $g(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{F}$ 。又 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。证明: $g(x) \mid (f(x))^2$ 的充分必要条件是 $g(x) \mid f(x)$ 。

11. 设 m, n, p 都是非负整数, 证明: $x^2 + x + 1 \mid x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ 。

12. 除式为一次因式的带余除法有更为精简的计算格式，这种除法也称为*综合除法*。设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{F}[x]$ ， $x - a$ 除 $f(x)$ 的商为 $q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_0$ ，余式为 $r \in \mathbb{F}$ 。证明：

$$b_{n-1} = a_n, b_i = ab_{i+1} + a_{i+1}, 0 \leq i \leq n-2, r = ab_0 + a_0.$$

13. 用综合除法求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商与余式，并与基础题中按照一般带余除法的计算方式进行比较。

1. $f(x) = x^5 + 2x^3 - 1, g(x) = x + 1$;
2. $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 1, g(x) = 2x - 1$ 。

14. 写一个程序实现综合除法，并用上题中的例子进行验证。

1.3 最大公因式和辗转相除法

课后练习 (1.3.6) · 共 18 题 · 基础题5题 · 提高题10题 · Sage相关3题

基础题

1. 设 $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$, $g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$, 求 $(f(x), g(x))$, 并求 $u(x), v(x)$, 使得 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ 。

2. 设 $f(x) = x^3 + (1+a)x^2 + 2x + 2b$, $g(x) = x^3 + ax^2 + b$ 的最大公因式是一个二次多项式, 求 a, b 的值。

3. 设 $f(x), g(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上非零多项式, 证明: $f(x)$ 与 $g(x)$ 不互素的充分必要条件是存在非零多项式 $u(x), v(x)$, 使得

$$u(x)f(x) = v(x)g(x),$$

其中 $\deg u(x) < \deg g(x), \deg v(x) < \deg f(x)$ 。

4. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 证明下面几点等价:

1. $(f(x), g(x)) = 1$;
2. $(f(x), f(x) + g(x)) = 1$;
3. $(g(x), f(x) + g(x)) = 1$;
4. $(f(x)g(x), f(x) + g(x)) = 1$ 。

5. *求一个次数最低的多项式 $f(x)$, 使 $f(x)$ 除以 $x^2 + 1, x^3 + x^2 + 1$ 的余式分别为 $x + 1, x^2 - 1$ 。

提高题

6. 设 $t(x)$ 是首一多项式, $(f(x), g(x)) = d(x)$, 则

$$(f(x)t(x), g(x)t(x)) = d(x)t(x).$$

7. 设 $f_1(x) = af(x) + bg(x)$, $g_1(x) = cf(x) + dg(x)$, 且 $ad - bc \neq 0$, 证明:

$$(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x)).$$

8. 设 m, n 是正整数, 证明:

$$(x^m - 1, x^n - 1) = x^d - 1,$$

其中 d 是 m, n 的最大公因数。

9. 设 $f_1(x), \dots, f_m(x) \in \mathbb{F}[x]$, 证明: 存在 $u_1(x), \dots, u_m(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) = u_1(x)f_1(x) + \dots + u_m(x)f_m(x). \quad (1.3.8)$$

10. 设 $f(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。若 $g_i(x)|f(x), i = 1, 2, 3$ ，试问下列命题是否成立，并说明理由：

1. 如果 $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ 两两互素，那么一定有 $g_1(x)g_2(x)g_3(x)|f(x)$ ；
2. 如果 $(g_1(x), g_2(x), g_3(x)) = 1$ ，那么一定有 $g_1(x)g_2(x)g_3(x)|f(x)$ 。

11. 设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$ ， $h(x) \neq 0$ ，且 $g(x)$ 与 $h(x)$ 互素，证明：存在 $r(x), s(x) \in \mathbb{F}[x]$ ，使得

$$f(x) = g(x)r(x) + h(x)s(x),$$

其中 $\deg r(x) < \deg h(x)$ 。

12. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x], \deg f(x) > 0, \deg g(x) > 0$ 。证明：如果 $(f(x), g(x)) = 1$ ，那么存在唯一的 $u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$ ，使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1,$$

且 $\deg u(x) < \deg g(x), \deg v(x) < \deg f(x)$ 。

13. 设 $f_1(x), \dots, f_m(x), g_1(x), \dots, g_n(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。证明：

$$(f_1(x) \cdots f_m(x), g_1(x) \cdots g_n(x)) = 1$$

的充分必要条件是

$$(f_i(x), g_j(x)) = 1, \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

14. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x], m \in \mathbb{Z}^+$ ，证明：如果 $(f(x), g(x)) = 1$ ，那么 $(f^m(x), g^m(x)) = 1$ 。

15. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x], m \in \mathbb{Z}^+$ ，证明： $(f^m(x), g^m(x)) = (f(x), g(x))^m$ 。

Sage相关

16. 实现本节中使用的sage自带程序。

17. 写一个程序来求 练习 1.3.6.9中(1.3.8)的系数。

18. 写一个孙子定理的相关程序：以 $p_1, \dots, p_n; g_1, \dots, g_n$ 为输入， $f(x)$ 为输出。

1.4 标准分解式

课后练习 (1.4.3) · 共 10 题 · 基础题5题 · 提高题5题

基础题

1. 设 $p(x), f(x) \in \mathbb{F}[x], m \in \mathbb{Z}^+$ 。证明：若 $p(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约且 $p(x) | f^m(x)$ ，则 $p(x) | f(x)$ 。
2. 设 $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ 且 $\deg p(x) > 0$ 。证明：如果对任意的 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ ，有 $p(x) | f(x)$ 或 $(p(x), f(x)) = 1$ ，那么 $p(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的不可约多项式。
3. 设 $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ 且 $\deg p(x) > 0$ 。证明：如果对任意的 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ ，由 $p(x) | f(x)g(x)$ 可推出 $p(x) | f(x)$ 或 $p(x) | g(x)$ ，那么 $p(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的不可约多项式。

4. 试分别在复数域、实数域上写出下列多项式的标准分解式。

1. $f(x) = x^3 - 1$;

2. $g(x) = x^4 - 1$ 。

5. 设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{F}[x]$ 中次数大于0的多项式, $m \in \mathbb{Z}^+$, 试用标准分解式证明:

$$(f^m(x), g^m(x)) = (f(x), g(x))^m.$$

提高题

6. 设 $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, $f(x) = p(ax + b)$, 其中 $a, b \in \mathbb{F}$ 且 $a \neq 0$ 。证明: $p(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约。

7. 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上不可约 n 次多项式, 且 $a_0 \neq 0$ 。证明: $\tilde{f}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ 也是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式。

8. 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 且 $\deg f(x) > 0$, 证明下列命题等价:

1. $f(x)$ 与数域 $\mathbb{F}$ 上某个不可约多项式的正整数次幂相伴;
2. $\forall g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 有 $(f(x), g(x)) = 1$ 或者存在 $m \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $f(x) | g^m(x)$;
3. 在 $\mathbb{F}[x]$ 中, 从 $f(x) | g(x)h(x)$ 可以推出 $f(x) | g(x)$ 或者存在 $m \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $f(x) | h^m(x)$ 。

9. 设 $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{F}[x]$, 满足 $(f_i(x), g_j(x)) = 1, \forall i, j = 1, 2$, 证明:

$$(f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x)) = (f_1(x), f_2(x))(g_1(x), g_2(x)).$$

10. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 且 $f(x)g(x) \neq 0$ 。证明：存在自然数 N ，使得当 $n_1, n_2 > N$ 时，有

$$(f^{n_1}(x), g(x)) = (f^{n_2}(x), g(x)).$$

1.5 不可约因式的重数

课后练习 (1.5.4) · 共 15 题 · 基础题4题 · 提高题9题 · 挑战题2题

基础题

1. 按定义验证: 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, $c \in \mathbb{F}$, 则

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;

2. $(cf(x))' = cf'(x)$ 。

2. 判断下列有理数域上的多项式有无重因式。如果有重因式, 试求出一个多项式与它有完全相同的不可约因式 (不计重数), 且这个多项式没有重因式。

1. $x^4 + 4x^2 - 4x - 3$;

2. $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ 。

3. 设 $f(x) = x^3 + 3ax + b$, 当且仅当 a, b 满足什么条件时, $f(x)$ 有重因式。

4. 若 $x^2 + x + 1 \mid f_1(x^3) + xf_2(x^3)$, 则 $x - 1 \mid f_1(x)$ 且 $x - 1 \mid f_2(x)$ 。

提高题

5. 按定义验证: 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, 则

$$1. (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x);$$

$$2. (f^n(x))' = nf^{n-1}(x)f'(x)。$$

6. 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 次多项式, 证明: $f'(x) \mid f(x)$ 的充分必要条件是

$$f(x) = a(x - b)^n,$$

这里 $a, b \in \mathbb{F}$ 。

7. 设 $f(x), p(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。证明: 若 $p(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约, 且 $f(x)$ 与 $p(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上存在公共根, 则 $p(x) \mid f(x)$ 。

8. 设 $p(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的不可约多项式, $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $x_1, \dots, x_s$ 是 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的根。证明: 若 $p(x) \nmid f(x)$, 则存在 $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得

$$\frac{1}{p(x_i)} = g(x_i), \quad i = 1, \dots, s.$$

9. 当且仅当正整数 n 满足何条件时, $x^2 + x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1$, 请加以证明。

10. 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 且 $\deg f(x) = n > 0$ 。证明: a 是 $f(x)$ 的 k 重根($k \geq 1$)的充分必要条件是 $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0, f^{(k)}(a) \neq 0$ 。

11. 设 $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。证明：如果 $p(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，那么 $p(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上没有重根。

12. 设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 次多项式，且 $f(0) = 0$ 。令 $g(x) = xf(x)$ ，证明：如果 $f'(x) \mid g'(x)$ ，那么 $g(x)$ 有 $n+1$ 重零根。

13. 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\deg f(x) > 0$, m 是大于 1 的正整数。证明：若 $f(x) \mid f(x^m)$ ，则 $f(x)$ 的根或为 0 或为 1 的某个方根。

挑战题

14. 设 $p(x)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 次不可约多项式， n 为大于 1 的奇数。证明：若 c_1, c_2 是 $p(x)$ 的两个不同复根，则 $c_1 + c_2 \notin \mathbb{F}$ 。

15. 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\deg f(x) = n$, 且 $f(k) = \frac{k}{k+1}, k = 0, 1, \dots, n$, 求 $f(n+1)$ 。

课后练习 (1.6.4) · 共 14 题 · 基础题3题 · 提高题7题 · 挑战题4题

基础题

1. 设 $a \in \mathbb{R}^+$, 求 $f(x) = x^n - a^n$ 在 $\mathbb{C}$ 上的标准分解式。
2. 构造次数最小的实系数多项式, 使得它们分别有
 1. 2重根 -1 , 单根 2 和 $1 + i$;
 2. 2重根 i , 单根 $1 - i$ 。
3. 设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f(x)$ 为奇数, 证明: $f(x)$ 必有实根。

提高题

4. 设 $1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ 是 $x^n - 1$ 的所有不同的复根, 证明:

1. $(1 - \omega_1)(1 - \omega_2) \cdots (1 - \omega_{n-1}) = n$;

2. 当 n 为奇数时, $(1 + \omega_1)(1 + \omega_2) \cdots (1 + \omega_{n-1}) = 1$ 。

5. 设 $f_1(x), f_2(x)$ 是次数不超过 3 的首一互异多项式, 且

$$x^4 + x^2 + 1 \mid f_1(x^3) + x^4 f_2(x^3),$$

求 $(f_1(x), f_2(x))$ 。

6. 设 $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$,

1. 求 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的标准分解式。

2. 证明: $\prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{1}{2^m}$, $\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$ 。

7. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上次数大于1的首一多项式且无实根，证明：存在 $g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$ ，使得

$$f(x) = g^2(x) + h^2(x),$$

且 $\deg g(x) > \deg h(x)$ 。

8. 分别求多项式 $f(x) = x^n + 1$ 在 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 上的标准分解式。

9. 若实系数多项式 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ 的三个根均为实数，证明： $p^2 \geq 3q$ 。

10. 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的三个根为 α, β, γ ，如果 $c \neq 0$ ，求以 $\frac{\alpha}{\beta\gamma}, \frac{\beta}{\alpha\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha\beta}$ 为根的一个三次多项式。

挑战题

11. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f(x) \geq 1$, $\deg g(x) < \deg f(x)$, 且 $f(x)$ 的标准分解式为

$$f(x) = \prod_{i=1}^m (x - a_i)^{e_i} \prod_{j=1}^r (x^2 + b_j x + c_j)^{\ell_j},$$

证明: $\frac{g(x)}{f(x)}$ 可分解为形如

$$\frac{\lambda}{(x - a_i)^e} \text{ 或 } \frac{\mu x + \nu}{(x^2 + b_j x + c_j)^\ell}$$

的部分分式之和, 即

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{k_i=1}^{e_i} \frac{\lambda_{i,k_i}}{(x - a_i)^{k_i}} + \sum_{j=1}^r \sum_{s_j=1}^{\ell_j} \frac{\mu_{j,s_j} x + \nu_{j,s_j}}{(x^2 + b_j x + c_j)^{s_j}},$$

其中 $a_i, \lambda_{i,k_i}, b_j, c_j, \mu_{j,s_j}, \nu_{j,s_j} \in \mathbb{R}$, 且 $b_j - 4c_j < 0$ 。

12. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ 且 $\deg f(x) > 0, \deg g(x) > 0$ 。证明: 若对任意复数 α , 当且仅当 $f(\alpha) = 0$ 时, $g(\alpha) = 0$; 当且仅当 $f(\alpha) = 1$ 时, $g(\alpha) = 1$; 则多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等。

13. 设 $f(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_0$ 是实系数多项式，且 $a_0 \neq 0$ 。证明： $f(x)$ 至少有两个虚部不为0的复根。

14. 对于 n 次实系数多项式 $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$ ，忽略系数为0的项，把非零的系数按照次数从大到小排列，得到一个序列。在这个序列中，相邻系数符号相反，称为1次变号，变号的总次数称为多项式系数的变号次数。证明：实系数多项式方程正根的个数等于系数的变号次数减去一个非负偶数。

1.7 有理系数多项式的不可约因式

课后练习 (1.7.4) · 共 14 题 · 基础题5题 · 提高题5题 · 挑战题4题

基础题

1. 判断下列整系数多项式在 $\mathbb{Q}$ 上是否不可约:

1. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 9x + 3$;

2. $g(x) = x^6 + x^3 + 1$;

3. $h(x) = x^5 - 5x + 1$ 。

2. 利用Eisenstein判别法, 证明: 若 $p_1, p_2, \dots, p_t$ 是 t 个两两不同的素数, n 是一个大于1的整数, 那么 $\sqrt[n]{p_1 p_2 \cdots p_t}$ 是一个无理数。

3. 求下列多项式的有理根:

1. $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;

2. $2x^3 + x^2 - 3x + 1$ 。

4. 设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 。证明：若 $1 + \sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 的根，则 $1 - \sqrt{2}$ 也是 $f(x)$ 的根。

5. 试求一个次数最小的首项系数为1的有理系数多项式，使得它含以下根

$$1 + \sqrt{2}, 3 - i.$$

提高题

6. 试求含无理根 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 次数最低的首一有理系数多项式。

7. 设 $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 2$ ，其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是两两不同的偶数，证明： $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

8. 设 $f(x)$ 是次数大于0的首一整系数多项式, 证明: 若 $f(0)$ 和 $f(1)$ 都是奇数, 那么 $f(x)$ 没有整数根。

9. 若 $\frac{5}{11}$ 是整系数多项式 $f(x)$ 的根, 证明: $f(i)f(-i)$ 是非负整数, 且是146的倍数。

10. 设 $f(x)$ 是有理数域上不可约 n 次多项式, $n \geq 2$ 。证明: 若 $f(x)$ 某一个根的倒数也是 $f(x)$ 的根, 那么 $f(x)$ 的每一个根的倒数也都是 $f(x)$ 的根。

挑战题

11. 设 $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + 1$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是两两不同的整数。

1. 证明: 当 n 是奇数时, $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约;
2. 举例说明: 当 $n = 2, 4$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可能可约, 也可能不可约;
3. 证明: 当 $n = 4$ 且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约的充分必要条件是 $a_4 - a_1 = 3$;
4. 证明: 当 n 是偶数且 $n \geq 6$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

12. 设 $f(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是两两不同的整数, 证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

13. 设 $p_1, \dots, p_t$ 是个两两不同的素数, $\alpha = \sqrt[t]{p_1 \cdots p_t}$ 。令

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{Q}, i = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

证明: $\mathbb{Q}(\alpha)$ 是一个数域。

14. 设 $n \geq 2$ 为正整数, 证明: 多项式 $f(x) = x^n - x - 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

第二章

矩阵与初等变换——线性方程组的消元法求解

- 2.1 线性方程组、消元法及几何直观 (3 题)
- 2.2 矩阵及其运算 (33 题)
- 2.3 分块矩阵 (12 题)
- 2.4 行初等变换和初等矩阵 (8 题)
- 2.5 可逆矩阵 (14 题)
- 2.6 简化阶梯形、线性方程组的解及秩 (8 题)
- 2.7 列初等变换与相抵 (10 题)

2.1 线性方程组、消元法及几何直观

课后练习 (2.1.4) · 共 3 题 · 基础题3题

基础题

1. 判断下列方程是否是关于变元 x_1, x_2, x_3 的线性方程。

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1;$

2. $\frac{1}{2}x_1 - 3x_2 = 4;$

3. $2^{x_1} + 3^{x_2} + 5^{x_3} = 6;$

4. $2x_1 - x_2^{-1} + 3x_3 = 0;$

5. $\tan x_1 + \sin x_2 + \cos x_3 = 3;$

6. $-x_1 + 2x_3 = 7x_1 - 2x_2 - 9.$

2. 判断下列方程组是否是关于变元 x, y 的线性方程组。若是，求解该线性方程组。

1.
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 &= 3, \\ -x^2 + y^2 &= -1; \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 3x - 6y &= 3, \\ -x + 2y &= 1; \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 3x - 6y &= 3, \\ -x + 2y &= -1; \end{cases}$$

3. 求解下列线性方程组：

$$1. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= b_1, \\ x_2 + 2x_3 &= b_2, \\ x_3 &= b_3; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= b_1, \\ x_3 - 2x_4 &= b_2, \\ x_4 &= b_3; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= -3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= -1. \end{cases}$$

2.2 矩阵及其运算

课后练习 (2.2.6) · 共 33 题 · 基础题14题 · 提高题15题 · 挑战题4题

基础题

1. 分别写出4阶方阵 A , 其第 i 行第 j 列元素如下:

1. $a_{ij} = (-1)^{i+j};$

2. $a_{ij} = \begin{cases} j-i+1, & i \leq j, \\ 0, & i > j; \end{cases}$

3. $a_{ij} = \max\{i, j\};$

4. $a_{ij} = |i - j|.$

2. 判断乘积矩阵 AB, BA 是否有意义。若有意义, 写出该乘积矩阵。

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$2. A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$3. A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}, B = (1 \quad 1 \quad 1);$$

$$4. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$5. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$6. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$7. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

3. 主对角线上元素是同一个数 c , 其余元素全为0的 n 阶方阵称为数量矩阵, 记作 cE_n (或 cI_n) , 即

$$cE_n (= cI_n) = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c \end{pmatrix}.$$

设 A 为 n 阶方阵, 求 $A(cE_n)$, $(cE_n)A$ 。

4. 证明：两个上（下）三角矩阵的积仍是上（下）三角矩阵。

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，求所有与 A 可交换的矩阵。

6. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵， $k \in \mathbb{F}$ 。证明：若 B, C 都与 A 可交换，那么 $B + C, kB, BC$ 也都与 A 可交换。

7. 设 J 是元素全为 1 的 n 阶方阵，请将矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

表示成 $x E_n + y J$ 的形式，其中 x, y 为待定系数。

8. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 求 $X^T A X$ 。

9. 证明：如果 A, B 都是 n 阶反对称矩阵，那么 $AB - BA$ 也是反对称矩阵。

10. 计算:

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n;$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n;$$

$$3. \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n;$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2;$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

11. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \geq 2$, 求 $A^n - 2A^{n-1}$ 。

12. 举例说明存在非零 n 阶方阵 A , 使得 $A^2 = 0$ 。

13. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵且 $A^k = \mathbf{0}$, 求

$$(E_n - A)(E_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}).$$

14. 设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, 满足 $A = \frac{1}{2}(B + E_n)$ 。证明: $A^2 = A$ 的充分必要条件是 $B^2 = E_n$ 。(注: 称 $A^2 = A$ 的矩阵 A 为幂等矩阵, 称 $B^2 = E_n$ 的矩阵 B 为对合矩阵。)

提高题

15. 证明: 如果 $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, 其中 $a_1, \dots, a_n$ 两两互异, 那么与矩阵 A 可交换的矩阵只能是对角矩阵。

16. 若 n 阶方阵的第 i 行第 j 列元素是1, 其余元素都是0, 则称该方阵为 n 阶基础矩阵, 记为 E_{ij} 。证明: 如果 A 是 n 阶方阵满足 $AE_{ij} = E_{ij}A$, 那么 $a_{ii} = a_{jj}$ 且当 $k \neq i$ 时 $a_{ki} = 0$, 当 $l \neq j$ 时 $a_{jl} = 0$ 。

17. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, 证明: 如果 A 与所有数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵可交换, 那么 A 一定是数量矩阵。

18. 一个 n 阶方阵 A 的 迹定义为

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

证明: 对任意 n 阶方阵 A, B , 对任意常数 k , 有

1. $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$;
2. $\text{tr}(kA) = k\text{tr}(A)$;
3. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ 。

19. 证明: 不存在数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵 A, B , 使得 $AB - BA = E_n$ 。

20. 设 A, B 都是 n 阶对称矩阵, 证明: AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$ 。

21. 设 A 是 n 阶反对称矩阵, α 是 n 维列向量, 证明: $\alpha^T A \alpha = 0$ 。

22. 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵, 证明: $\text{tr}(A^T A) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $A = 0$ 。

23. 设 A 是 $m \times n$ 复矩阵, 证明: $\text{tr}(\overline{A}^T A) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $A = 0$ 。

24. 设 A 是 n 阶复矩阵, 若 $\overline{A}^T = A$, 则称 A 是一个Hermite矩阵。若 $\overline{A}^T = -A$, 则称 A 是一个斜Hermite矩阵。证明: 任一复 n 阶矩阵均可唯一地表示成一个Hermite矩阵与一个斜Hermite矩阵之和。

25. 设 A, B 都是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵 ($n \geq 2$)。如果 $A^2 = B^2$, 是否可推出 $A = B$ 或 $A = -B$? 若正确请证明, 若不正确请举出一个反例。

26. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵,

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_0 \in \mathbb{F}[x],$$

把 x 用 A 代入, 得

$$f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E_n,$$

称 $f(A)$ 为矩阵 A 的多项式。设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

是 n 阶方阵, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, 求 $f(A)$ 。

27. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 证明:

$$f(A)g(A) = g(A)f(A).$$

28. 设 A, B, C 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 。若 $AB = BC$, 证明:

1. 对任意正整数 k , 有 $A^k B = BC^k$;
2. 对任意 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 有 $f(A)B = Bf(C)$ 。

29. 设 n 阶方阵 A 每行元素之和都是 a , 证明: 对任意正整数 k , A^k 每行元素之和都是 a^k 。

挑战题

30. 试求两个 n 阶方阵 B_1, B_2 , 使得与 B_1, B_2 都可交换的矩阵必为数量矩阵。

31. 记 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶方阵构成的集合。若映射 $\phi: \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$ 满足: 对任意 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}, c \in \mathbb{F}$, 有

1. $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$,

2. $\phi(cA) = c\phi(A)$,

3. $\phi(AB) = \phi(BA)$,

证明: 存在 $a \in \mathbb{F}$, 使得 $\phi(A) = a \operatorname{tr}(A), \forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 。

32. 设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上二阶方阵, 满足 $AB - BA = A$, 证明: $A^2 = \mathbf{0}$ 。

33. 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, C 为 n 阶实反对称矩阵, 且 $A^2 + B^2 = C^2$, 证明: $A = B = C = \mathbf{0}$ 。

2.3 分块矩阵

课后练习 (2.3.3) · 共 12 题 · 基础题3题 · 提高题9题

基础题

1. 设 M_1 是 m_1 阶方阵, N_1 是 n_1 阶方阵, A_{ij} 为 $m_i \times m_j$ 矩阵, B_{kl} 为 $m_k \times n_l$ 矩阵, K 是 $m_1 \times m_2$ 矩阵, L 是 $n_1 \times n_2$ 矩阵, 计算:

1. $\begin{pmatrix} M_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{n_2} \end{pmatrix};$
2. $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & E_{m_2} \\ E_{m_1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & E_{n_1} \\ E_{n_2} & \mathbf{0} \end{pmatrix};$
3. $\begin{pmatrix} E_{m_1} & K \\ \mathbf{0} & E_{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n_1} & L \\ \mathbf{0} & E_{n_2} \end{pmatrix};$
4. $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \mathbf{0} & A_{22} & A_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \mathbf{0} & B_{22} & B_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_{33} \end{pmatrix}.$

2. 将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 适当分块后, 计算 AB 。

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 计算

1. A^n , 其中 $n \geq 2$;

2. $AA^T, A^T A$ 。

提高题

4. 设 A 为 n 阶方阵, 证明: 若对任意 n 维列向量 α 都有 $A\alpha = \mathbf{0}$, 那么 $A = \mathbf{0}$ 。

5. 设 ε_i 为 n 维标准单位列向量, E_{ij} 是 n 阶基础矩阵。证明:

1. $\varepsilon_i^T \varepsilon_j = \delta_{ij}$, 其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号, 即 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$

2. $\varepsilon_i \varepsilon_j^T = E_{ij}$;

3. $E_{ij} E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, & j = k, \\ \mathbf{0}, & j \neq k; \end{cases}$

4. 设 A 是 n 阶方阵, 则 $E_{ij} A$ 的第 i 行是 A 的第 j 行, 其它元为 0;

5. 设 A 是 n 阶方阵, 则 $A E_{ij}$ 的第 j 列是 A 的第 i 列, 其它元为 0;

6. 设 A 是 n 阶方阵, 则 $E_{ij} A E_{kl} = a_{jk} E_{il}$ 。

6. 设 A 为 n 阶方阵, 证明: 若对任意 n 阶方阵 B 都有 $\text{tr}(AB) = 0$, 那么 $A = \mathbf{0}$ 。

7. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 E_{n_1} & & & \\ & a_2 E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_r E_{n_r} \end{pmatrix}$$

其中 $a_i \neq a_j$ (当 $i \neq j$ 时), E_{n_i} 是 n_i 阶单位矩阵。证明: 与 A 可交换的矩阵只能是分块对角矩阵 $\text{diag}(B_1, \dots, B_r)$, 其中 B_i 为 n_i 阶方阵, $i = 1, \dots, r$ 。

8. 计算 $\begin{pmatrix} 0 & E_4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$, 其中 $n = 2, 3, 4, 5$ 。

9. 设 n 阶基础循环矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

证明：对任意 n 阶方阵 A ,

1. CA 相当于把 A 的每一行向上移一行，第1行换到最后一行；
2. AC 相当于把 A 的每一列向右移一列，最后一列换到第1列。

10. 设 C 为 n 阶基础循环矩阵， 证明：对任意 $1 \leq k \leq n$,

$$C^k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & E_{n-k} \\ E_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

11. 下列形式的矩阵称为 *循环矩阵*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

证明:

1. n 阶循环矩阵 A 必可表示成 n 阶基本循环矩阵 C 的多项式;
2. 两个 n 阶循环矩阵的乘积仍为循环矩阵。

12. 每一行和每一列有且仅有一个1，其余元素均为0的 n 阶方阵称为 n 阶 *置换矩阵*，证明:

1. 若 P 是 n 阶置换矩阵，则 $P^T P = E_n$;
2. 若 P_1, P_2 都是 n 阶置换矩阵，则 $P_1 P_2$ 也是 n 阶置换矩阵。

2.4 行初等变换和初等矩阵

课后练习 (2.4.4) · 共 8 题 · 基础题3题 · 提高题3题 · 挑战题2题

基础题

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 计算:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2025} A;$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2025} A;$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A.$

2. 判断下列矩阵是否为阶梯形矩阵。

$$1. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix};$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}。$$

3. 用初等行变换将矩阵 A 化为阶梯形矩阵。

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix};$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}。$$

提高题

4. 上题所化的阶梯形矩阵能否通过初等行变换化为原矩阵 A ? 若能, 写出所施行的初等行变换。

5. 证明: $E(i, j) = E(j(-1)) E(i, j(1)) E(j, i(-1)) E(i, j(1))$ 。

6. 请指出以下证明“任一 $m \times n$ 矩阵 A ($m \geq 2$) 必可经过初等行变换化为至少一行全为0的矩阵”中的错误。

“先将 A 的第1行加到第2行, 第2行加到第1行得矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & \cdots & a_{1n} + a_{2n} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & \cdots & a_{1n} + a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

再将 B 的第1行乘以 -1 加到第2行可得第2行全为0的矩阵

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & \cdots & a_{1n} + a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.”$$

挑战题

7. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, 其中 $a \neq 0$ 。证明: A 可表示成若干消法矩阵的乘积。
8. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: A 是置换矩阵的充分必要条件为 A 可表示成若干互换矩阵的乘积。

2.5 可逆矩阵

课后练习 (2.5.5) · 共 14 题 · 基础题6题 · 提高题6题 · 挑战题2题

基础题

1. 设 A, B, C 是 n 阶方阵。若 $AB = BC$ ，且 B 可逆，是否必有 $A = C$ ？请说明理由。
2. 设 A, B 为 n 阶方阵，且 A 可逆。证明：若 A, B 可交换，则 A^{-1}, B 也可交换。
3. 设 n 维列向量 $X = (a, 0, \dots, 0, a)^T, a < 0$ 。若矩阵 $A = E - XX^T$ 与 $B = E + 2XX^T$ 互逆，求 a 。
4. 设 A 为 n 阶方阵，满足 $A^2 + A + E = 0$ ，其中 E 是 n 阶单位矩阵，证明：对任意实数 a ， $A - aE$ 都可逆。

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} 。

6. 设 $B = P^{-1}AP$, 其中 $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 求 A^{2025} 。

提高题

7. 设 A 是 n 阶可逆矩阵。若 A 的每行元素之和均为 a , 证明: A^{-1} 的每行元素之和必为 a^{-1} 。

8. 设 A 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵。

1. 若存在正整数 k 使得 $A^k = 0$, 证明: $E - A$, $E + A + \cdots + A^{k-1}$ 都可逆; 并求 $(E - A)^{-1}$ 与 $(E + A + \cdots + A^{k-1})^{-1}$ 。

2. 设 $B = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \cdots & b^{n-2} & b^{n-1} \\ 0 & 1 & b & b^2 & \cdots & b^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B^{-1} 。

9. 证明:

1. 若 A 是可逆（反）对称矩阵，则 A^{-1} 也是（反）对称矩阵；
2. 若 A 是可逆上（下）三角矩阵，则 A^{-1} 也是上（下）三角矩阵。

10. 设 A 是 $n \times m$ 矩阵， B 是 $m \times n$ 矩阵。证明：若 $E_n - AB$ 可逆，则 $E_m - BA$ 可逆，且

$$(E_m - BA)^{-1} = E_m + B(E_n - AB)^{-1}A.$$

11. 设 A 为 n 阶方阵。若 A 与任意 n 阶可逆矩阵可交换，证明： A 是数量矩阵。

12. 设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ 满足 $f(A) = 0, g(B) = 0$ 。若 $f(x), g(x)$ 在复数域上没有公共根, 证明: $f(B), g(A)$ 都是可逆矩阵。

挑战题

13. 设 A 是 n 阶方阵, 且 $E_n + A$ 可逆, 定义

$$c(A) = (E_n - A)(E_n + A)^{-1},$$

证明: $E_n + c(A)$ 可逆, 且 $c(c(A)) = A$ 。

14. 设 P 是 n 阶置换矩阵, 证明: 存在正整数 k , 使得 $P^k = E_n$ 。

2.6 简化阶梯形、线性方程组的解及秩

课后练习 (2.6.6) · 共 8 题 · 基础题3题 · 提高题5题

基础题

1. 用初等行变换将下列矩阵化为简化阶梯形矩阵。

$$1. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. 用Gauss-Jordan消去法求下列线性方程组的一般解。

$$1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

3. 求下列矩阵的秩。

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -10 & 5 & -7 & 3 \\ 4 & -2 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{pmatrix};$$

$$3. \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

提高题

4. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = m$ 。证明: 对任意 $\beta \in \mathbb{F}^n$, $AX = \beta$ 都有解。

5. 设 n 阶方阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, 其中 A 是 $s \times t$ 矩阵。若 M 是可逆矩阵, 求 $r(B)$ 与 $r(C)$ 。

6. 设 A 是 3×4 矩阵, 且 $r(A) = 2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $r(BA)$ 。

7. 设 A, B 是 n 阶方阵。证明: 若 AB 可逆, 则 A, B 都是可逆矩阵。

8. 设 A, B 是 n 阶方阵, 满足 $AB = A - B$, 证明: A 可逆的充分必要条件是 B 可逆。

2.7 列初等变换与相抵

课后练习 (2.7.3) · 共 10 题 · 基础题3题 · 提高题6题 · 挑战题1题

基础题

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

计算:

1. APQ ;2. AQP ;3. PAQ 。

2. 求下列矩阵的相抵标准型。

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 13 & -27 & 8 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 4 & -7 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}。$$

3. 判断矩阵 A, B 是否相抵, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

提高题

4. 设 $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 证明: $r(C) = r(A) + r(B)$ 。

5. 设 M 是 m 阶方阵, A 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(A) = m$, 证明:

1. 存在秩为 m 的 $n \times m$ 矩阵 B , 使得 $AB = E_m$;
2. 若 $MA = 0$, 则 $M = 0$;
3. 若 $MA = A$, 则 $M = E_m$ 。

6. 设 A 是秩为 m 的 $m \times n$ 矩阵, 证明: 存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得

$$AP = (E_m \quad 0).$$

7. 证明: 任意 n 阶方阵 A 可表为 $A = PB$, 其中 P 为可逆矩阵, $B^2 = B$ 。

8. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 证明: 存在 $n \times m$ 矩阵 B , 使得

$$A = ABA, B = BAB.$$

9. 设 A 是一个 n 阶方阵, 证明:

1. $r(A) \leq 1$ 的充分必要条件是存在 n 维列向量 α, β , 使得 $A = \alpha\beta^T$;
2. 如果 $r(A) = 1$, 那么 $A^2 = cA$, 其中 c 为常数。

挑战题

10. 设 A 是 n 阶非零方阵, 其中 $n \geq 2$, 证明: 存在 n 阶非零方阵 B , 使得

$$(AB)^n = (BA)^n = \mathbf{0}.$$

第三章

行列式——线性方程组的公式解

- 3.1 行列式的展开式定义 (18 题)
- 3.2 行列式与初等变换 (15 题)
- 3.3 行列式按行(列)展开 (23 题)
- 3.4 Cramer法则 (5 题)

3.1 行列式的展开式定义

课后练习 (3.1.5) · 共 18 题 · 基础题7题 · 提高题3题 · 挑战题3题 · Sage相关5题

基础题

1. 计算 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 。

2. 求排列 $n, n-1, \dots, 1$ 的逆序数，并指出其奇偶性。

3. n 阶行列式的反对角线上 n 个元素的乘积一定带负号吗？

4. 设 $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ ，请写出 4 阶行列式 $\det A$ 中取正号且含 $a_{32}a_{41}$ 的项。

5. 按定义计算行列式:

$$1. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$

$$2. \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix};$$

$$3. \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix}.$$

6. 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} -4x & x & 1 & 2x \\ 3 & x & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2x \end{vmatrix},$$

求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数并说明理由。

7. 设 A 是 n 阶复矩阵, 证明: $\det \bar{A} = \overline{\det A}$.

提高题

8. 设 $j_1, \dots, j_n$ 是 $1, \dots, n$ 的一个排列, 证明:

$$\tau(j_1, \dots, j_{n-1}, j_n) = \tau(j_1, \dots, j_{n-1}) + (n - j_n).$$

9. 若排列 $j_1, \dots, j_n$ 的逆序数为 r , 求排列 $j_n, j_{n-1}, \dots, j_1$ 的逆序数。

10. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 n 阶方阵, x 是未定元,

$$f(x) = \det(xE_n - A),$$

证明: $f(x)$ 是一个首项系数为 1 的 n 次多项式, 且 $n-1$ 次项系数为 $-\text{tr}(A)$ 。

挑战题

11. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 其中 a_{ij}, b_{ij} 都是整数且奇偶性相同, 证明: $\det A$ 与 $\det B$ 奇偶性也相同。

12. 设 $n \geq 2$, 证明: 如果 n 阶矩阵 A 的元素为 1 或 -1 , 那么 $\det A$ 必为偶数。

13. 设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 是 3 阶实方阵, 且 $|a_{ij}| = 1$, 证明: $|\det A| \leq 4$ 。

- 5

3.2 行列式与初等变换

课后练习 (3.2.5) · 共 15 题 · 基础题5题 · 提高题6题 · 挑战题4题

基础题

1. 设 n 阶行列式 $\det A$ 的值为 d ,

1. 将 $\det A$ 的每个元素 a_{ij} 换成 $(-1)^{i+j}a_{ij}$, 得到的行列式的值是多少?
2. 将 $\det A$ 的每个元素 a_{ij} 换成 $2^{i-j}a_{ij}$, 得到的行列式的值是多少?
3. 将 $\det A$ 的第一行移到最后一行, 其余各行依次保持原来次序向上移动, 得到的行列式的值是多少?
4. 从 $\det A$ 的第2列开始每列加上它前面的一列, 同时将第1列加上 $\det A$ 的第 n 列, 得到的行列式的值是多少?

2. 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, C 为 $m \times n$ 矩阵。若 $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = d$, 求 $\det \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & C \end{pmatrix}$ 。

3. 设 X, Y, Z_2, Z_3, Z_4 是4维列向量,

$$A = (X, Z_2, Z_3, Z_4), B = (Y, Z_2, Z_3, Z_4).$$

已知 $\det A = 5$, $\det B = 2$, 计算 $\det(A + B)$ 。

4. 证明:

$$1. \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 & c_1 - a_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 & c_2 - a_2 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2. \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5. 计算下列行列式:

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 11 \end{vmatrix};$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$3. \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix};$$

$$4. \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

提高题

6. 设 n 是大等于2的整数，证明：在 $1, 2, \dots, n$ 所构成的全部排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个。
7. 设 n 是大等于2的整数， Γ 为形如下列形式的 n 阶方阵构成的集合：矩阵的每行每列只有一个非零元素，且该非零元素为1。试求 $\sum_{A \in \Gamma} \det A$ 。
8. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，其中 $a_{ij} = \max\{i, j\}$ ，求 $\det A$ 。
9. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ，其中 $a_{ij} = |i - j|$ ，求 $\det A$ 。

10. 设 c_1, c_2, c_3 是多项式 $f(x) = x^3 + px + q$ 的根, 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{vmatrix}.$$

11. 设 $n \geq 3$, 计算 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 c_1 & a_2 + b_1 c_2 & \cdots & a_n + b_1 c_n \\ a_1 + b_2 c_1 & a_2 + b_2 c_2 & \cdots & a_n + b_2 c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 + b_n c_1 & a_2 + b_n c_2 & \cdots & a_n + b_n c_n \end{vmatrix}.$$

挑战题

12. 由定义 3.2.17 中的 4 个性质推出行列式展开式定义中的 (3.1.5)。

13. 设 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 其中

$$f_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{i,n-1}x^{n-1}, i = 0, \dots, n-1.$$

记 A 为 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

证明: 对任意正整数 m , 都有

$$(f_0(m), f_1(m), \dots, f_{n-1}(m)) \mid \det A.$$

14. 在直角坐标平面中, $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 和 $C(x_3, y_3)$ 。证明 $\triangle ABC$ 的面积为

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

15. 设 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 是直角坐标平面上的两个不同点。证明由 AB 所确定直线的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3.3 行列式按行(列)展开

课后练习 (3.3.6) · 共 23 题 · 基础题6题 · 提高题7题 · 挑战题6题 · Cauchy-Binet公式1题 · Sage相关3题

基础题

1. 求 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ 中第(1,2), 第(2,4)元素的余子式和代数余子式。

2. 计算下列行列式:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 9 \\ 7 & 8 & 2 & -7 & 6 \\ -1 & 5 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix};$

2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix};$

3. 计算下述行列式，并将结果因式分解：

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix}.$$

4. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & a_1^{n-3}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & a_2^{n-3}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ a_3^{n-1} & a_3^{n-2}b_3 & a_3^{n-3}b_3^2 & \cdots & a_3b_3^{n-2} & b_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & a_n^{n-3}b_n^2 & \cdots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$ 。

5. 设 $\det A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ ，求

1. $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$;
2. $M_{11} + 2M_{21} + 3M_{31} + 4M_{41}$ 。

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & 25 & 1 & 2 & 0 \\ 11 & 49 & 0 & 3 & 4 \\ 19 & 52 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 。

提高题

7. 设 A 为数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, α 为数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维列向量。证明: 若 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & a \end{vmatrix} = 0$, 则

$$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{vmatrix} = (b - a) \cdot |A|.$$

8. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 n 阶方阵, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x_1 & a_{12} + x_2 & \cdots & a_{1n} + x_n \\ a_{21} + x_1 & a_{22} + x_2 & \cdots & a_{2n} + x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + x_1 & a_{n2} + x_2 & \cdots & a_{nn} + x_n \end{vmatrix} = |A| + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j A_{ij}.$$

9. 设 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & & & & \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & & & \\ & 1 & 2 \cos \alpha & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 \cos \alpha & 1 \\ & & & & 1 & 2 \cos \alpha & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix},$$

证明: $D_n = \cos(n\alpha)$ 。

10. 计算下列 n 阶行列式:

$$1. \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 & \cdots & x+n-1 & x+n \\ x+2 & x+3 & x+4 & \cdots & x+n & x+1 \\ x+3 & x+4 & x+5 & \cdots & x+1 & x+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x+n-1 & x+n & x+1 & \cdots & x+n-3 & x+n-2 \\ x+n & x+1 & x+2 & \cdots & x+n-2 & x+n-1 \end{vmatrix};$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

11. 设 $n \geq 2$, 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

其中 $x \neq a_i, i = 1, \dots, n$ 。

12. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix},$$

其中 $y \neq z$ 。

13. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 n 阶方阵, x 是未定元,

$$f(x) = \det(xE_n - A),$$

证明:

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

其中

$$a_k = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} A \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{bmatrix}.$$

挑战题

14. 计算下列 n 阶行列式 ($1 \leq j \leq n-1$):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{j-1} & a_1^{j+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{j-1} & a_2^{j+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{j-1} & a_n^{j+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

15. 设 $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{F}$ 互不相同。对任意 $0 \leq i \leq n-1$, 令

$$f_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n-1 \\ j \neq i}} (x - b_j) = a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{i,n-2}x^{n-2} + x^{n-1},$$

计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-2} & 1 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & 1 \end{vmatrix}.$$

16. 设 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x) \in \mathbb{Z}[x]$, 其中

$$f_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{i,n-1}x^{n-1} \quad (i = 0, \dots, n-1).$$

记 A 为 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

证明: 存在 n 阶整数矩阵 C 使得 $AC = E_n$ 的充分必要条件是存在 n 个互不相同的整数 $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ 使得

$$\begin{vmatrix} f_0(b_0) & f_0(b_1) & \cdots & f_0(b_{n-1}) \\ f_1(b_0) & f_1(b_1) & \cdots & f_1(b_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(b_0) & f_{n-1}(b_1) & \cdots & f_{n-1}(b_{n-1}) \end{vmatrix} = \pm \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (b_j - b_i).$$

17. 设 A, B 是 n 阶方阵, $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ 分别是 A, B 的列向量组, 证明:

$$|A| \cdot |B| = \sum_{i=1}^n |\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta_1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n| \cdot |\alpha_i, \beta_2, \dots, \beta_n|.$$

18. (Hermite定理) 设 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 是 $\mathbb{F}[x]$ 中 n 个非零多项式 ($n \geq 2$), 证明: 存在 $n(n-1)$ 个多项式

$$g_{ij}(x) \in \mathbb{F}[x] (2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n),$$

使得

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \cdots & g_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1}(x) & g_{n2}(x) & \cdots & g_{nn}(x) \end{vmatrix} = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)).$$

19. 设 n 阶实方阵 A 的每个元素的绝对值为2, 证明: 当 $n \geq 3$ 时, $|\det A| \leq \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1}n!$ 。

Cauchy-Binet公式

20. Cauchy-Binet公式. 设 A 是 $m \times n$, B 是 $n \times m$ 矩阵, 且 $m \leq n$, 则

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} A \begin{bmatrix} 1 & \dots & m \\ j_1 & \dots & j_m \end{bmatrix} \cdot B \begin{bmatrix} j_1 & \dots & j_m \\ 1 & \dots & m \end{bmatrix}.$$

Sage相关

21. 写一个函数, 以矩阵 A 和 i, j 为输入, 输出 M_{ij} 或 A_{ij} 。借助此函数, 验证基础题中手算题目的结果。

22. 写一个函数, 以 $x_0, \dots, x_n$ 为输入, 输出Vandermonde行列式的矩阵。结合sage自带的 $\det$ 函数, 验证例 3.3.8中公式的正确性。

23. 写一个函数，以 A 和 $i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k$ 为输入，输出相应的 k 阶子矩阵/子式/余子式/代数余子式。

3.4 Cramer法则

课后练习 · 共 5 题 · 基础题2题 · 提高题3题

基础题

1. 设 a, b, c 是数域 $\mathbb{F}$ 上互不相同的常数, 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3, \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3, \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3. \end{cases}$$

2. 讨论当 a, b, c 满足什么条件时, 线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b, \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 = c, \end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多解? 有解时求出其解。

提高题

3. 利用线性方程组理论证明: 一元 n 次多项式不能有多于 n 个互异的根。

4. 设 $a_1, \dots, a_n$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 个不同的数, 则对于任意 $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$, 存在唯一的次数小于 n 的多项式

$$L(x) = \sum_{i=1}^n b_i \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - a_j}{a_i - a_j},$$

满足对于任意的 $i (1 \leq i \leq n)$, 都有

$$L(a_i) = b_i.$$

5. 设 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 是坐标平面上两个不同点的坐标, 证明: 由这两个点确定的直线方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

结合行列式的几何意义给出上述公式的几何解释。

第四章

线性组合与列向量空间——线性方程组的列观点

- 4.1 列向量空间 $\mathbb{F}^m$ (8 题)
- 4.2 线性相关与线性无关 (14 题)
- 4.3 生成子空间、极大无关组与秩 (20 题)
- 4.4 $\mathbb{F}^m$ 的子空间、基与维数 (14 题)
- 4.5 线性方程组解的结构 (14 题)

4.1 列向量空间 $\mathbb{F}^m$

课后练习 (4.1.5) · 共 8 题 · 基础题7题 · 提高题1题

基础题

1. 在 $\mathbb{F}^4$ 中, 设

$$\alpha_1 = (-1, 3, 2, 5)^T, \alpha_2 = (2, -1, 6, 4)^T, \alpha_3 = (7, -2, 11, 1)^T,$$

求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的分别以下列数为组合系数的线性组合 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$:

1. $c_1 = -2, c_2 = 3, c_3 = -1$;

2. $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0$ 。

2. 设 $\alpha = (2, -1)^T, \beta = (3, 3)^T$ 。利用sage, 在坐标平面中画出下列向量:

$$\alpha, \beta, -2\alpha, -2\alpha + \beta.$$

3. 设 $\alpha = (1, 1, -2)^T, \beta = (-2, -3, 4)^T, \gamma = (-2, 1, 1)^T$ 。利用sage, 在3维坐标系中画出下列向量:

$$\alpha + \beta, \alpha + \beta - 2\gamma.$$

4. 在 $\mathbb{F}^m$ 中, 令

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, \varepsilon_m = (0, \dots, 0, 1)^T.$$

证明: $\mathbb{F}^m$ 中任一向量 α 都可由向量组 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ 线性表出。

5. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 $\mathbb{F}^m$ 中向量组, 证明: 对任意 $1 \leq i \leq n$, α_i 都可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表出。

6. 在 $\mathbb{F}^3$ 中, 设

$$\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (a+1, 2a+1, a+1)^T, \alpha_3 = (2, 3, a+4)^T.$$

讨论 a 取何值时, 向量 $\beta = (1, 1, 2a+1)^T$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 并写出它的一种表示方式。

7. 已知 α, β 是 $\mathbb{F}^m$ 中向量, 求向量 γ 使得

$$5\gamma + 2\alpha - \beta = 3(\gamma + \alpha) - 2(3\alpha - 2\beta).$$

提高题

8. 用向量的相关知识证明: 对角线相互平分的四边形是平行四边形。

4.2 线性相关与线性无关

课后练习 (4.2.4) · 共 14 题 · 基础题4题 · 提高题9题 · 挑战题1题

基础题

1. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}^m$, 下列说法对吗? 为什么?

1. 如果有全为0的数 $k_1, \dots, k_n$, 使得 $k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0$, 那么向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关。
2. 如果有一组不全为0的数 $k_1, \dots, k_n$, 使得 $k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n \neq 0$, 那么向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关。
3. 如果向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n (n \geq 2)$ 线性相关, 那么其中每一个向量都可以由其余向量线性表示。

2. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵满足 $BA = E_n$ 。证明: 矩阵 A 的列向量组线性无关。

3. 判断下列向量组是线性相关还是线性无关。如果线性相关，试找出其中一个向量，使得它可以由其余向量线性表示，并且写出它的一个表达式。

$$1. \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2. \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$3. \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

4. 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t+2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ t+9 \end{pmatrix}$$

线性相关，求 t 。

提高题

5. 设3维实列向量 $\alpha_1 = (\lambda - 1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, \lambda - 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, \lambda - 1)^T$, $\beta = (\lambda + 1, \lambda^2, 2\lambda + 1)^T$ 。问 λ 取何值时,

1. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示且表示法唯一;
2. β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示且表示法不唯一;
3. β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示。

6. 设 A 是 n 阶方阵, 若存在正整数 k , 使得线性方程组 $A^k X = 0$ 有解向量 α , 且 $A^{k-1}\alpha \neq 0$ 。证明: 向量组 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关。

7. 设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 判断向量组

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha_n, \beta_n = \alpha_n + \alpha_1$$

的线性相关性。

8. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}^m$ 线性无关, $\beta_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} \alpha_j, k = 1, \dots, n$ 。证明: 向量组 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

9. 设在向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 中, $\alpha_1 \neq 0$ 且每一个 α_i 都不能表成它的前 $i-1$ 个向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$ 的线性组合。证明: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关。

10. 设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 向量 β_1 可由它线性表示, 而向量 β_2 不能由它线性表示。证明: 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1 + \beta_2$ 线性无关。

11. 证明: $\mathbb{F}^n$ 中, 如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则任一向量 β 可以由 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表示。

12. 设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 ($n \geq 3$), 问:

1. α_1 能否由 $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性表示?

2. α_n 能否由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性表示?

13. 设 $\alpha_i = (1, t_i, \dots, t_i^{m-1})^T, i = 1, \dots, n$, 其中 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 是互不相同的数, 且 $1 \leq n \leq m$ 。证明: 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关。

挑战题

14. 设 $A_1, \dots, A_{2026}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 2025 阶方阵, 证明关于 $x_1, \dots, x_{2026}$ 的方程

$$\det(x_1 A_1 + \cdots + x_{2026} A_{2026}) = 0$$

至少有一组非零解。

4.3 生成子空间、极大无关组与秩

课后练习 (4.3.5) · 共 20 题 · 基础题7题 · 提高题11题 · 挑战题2题

基础题

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, 判断下列向量是否属于 A 的列空间, 并说明理由。

1. $\beta = (1, 1, 0)^T$;

2. $\gamma = (1, -1, 1)^T$ 。

2. 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix},$$

1. 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组;
2. 将其余向量表示为该极大线性无关组的线性组合。

3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{F}^m$, 若它们两两线性无关但全体线性相关, 证明: $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle$ 。

4. 设向量 β 可以由 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 但不能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表示。证明:

1. 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$ 与向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \beta$ 等价;
2. $r(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s) = r(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \beta)$ 。

5. 设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 与向量组 $\beta_1, \dots, \beta_s$ 等价, 且 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 试问 $\beta_1, \dots, \beta_s$ 是否一定线性无关? 如果结论成立, 请证明; 如果不成立, 请举出反例。

6. 若 A 是一个对角矩阵, 证明: $r(A)$ 等于 A 的非0对角元个数。

7. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵。证明: 若 $m > n$, 则

$$\det(AB) = 0.$$

提高题

8. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是一组 n 维列向量, 已知单位向量 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 可被它们线性表示, 证明: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关。

9. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是一组 n 维列向量, 证明: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是任一 n 维列向量都可被它们线性表示。

10. 用向量组的知识证明：数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 个方程的 n 元线性方程组

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

对任意 $\beta \in \mathbb{F}^n$ 都有解的充分必要条件是 $\det(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$ 。

11. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r ，证明： $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大无关组。

12. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r ， $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中 r 个向量，使得 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中每个向量都可被它们线性表示，证明： $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 的一个极大无关组。

13. 若 A 是一个上三角矩阵，证明： $r(A)$ 大于等于 A 的非0对角元个数。

14. 设 A 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵, 从 A 中任意取 s 行作一个 $s \times n$ 矩阵 B 。证明: $r(B) \geq r + s - m$ 。

15. 证明: $r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$; $r \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \geq r(A) + r(B)$ 。

16. 利用 练习 4.3.5.15中的结论证明: 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$

17. 证明Frobenius不等式:

$$r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B).$$

18. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: $A^2 = E_n$ 的充要条件是

$$r(A + E_n) + r(A - E_n) = n.$$

挑战题

19. 设数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

则称 A 为严格主对角占优矩阵。证明: 若 A 为 n 阶严格主对角占优矩阵, 则 $r(A) = n$ 。

20. 设 n 阶方阶 $B(t)$ 和 $n \times 1$ 矩阵 $b(t)$ 分别为 $B(t) = (b_{ij}(t))$, $b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))^T$, 其中 $b_{ij}(t), b_i(t)$ 均为关于 t 的实系数多项式, $i, j = 1, \dots, n$ 。记 $d(t)$ 为 $B(t)$ 的行列式, $d_i(t)$ 为用 $b(t)$ 替代 $B(t)$ 的第 i 列后所得的 n 阶矩阵的行列式。若 $d(t)$ 有实根 t_0 , 使得线性方程组 $B(t_0)X = b(t_0)$ 有解, 证明: $d(t), d_1(t), \dots, d_n(t)$ 必有次数大等于1的公因式。

4.4 $\mathbb{F}^m$ 的子空间、基与维数

课后练习 (4.4.5) · 共 14 题 · 基础题8题 · 提高题5题 · 挑战题1题

基础题

1. 判断下列 $\mathbb{R}^m$ 的子集是否为 $\mathbb{R}^m$ 的子空间, 说明理由。

1. $V_1 = \{(a_1, \dots, a_m)^T \mid a_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$;

2. $V_2 = \{(a_1, \dots, a_m)^T \mid a_1 a_2 \cdots a_m \geq 0\}$;

3. $V_3 = \{(a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)^T \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ 。

2. 判断下列数域 $\mathbb{F}$ 上 n 元方程的解集是否为 $\mathbb{F}^n$ 的子空间:

1. $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$;

2. $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 1$;

3. $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ 。

3. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t \in \mathbb{F}^m$, 证明:

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_s \rangle + \langle \beta_1, \dots, \beta_t \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t \rangle.$$

4. 设 V_1, V_2 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间且 $V_1 \subseteq V_2$ 。证明: $V_1 = V_2$ 的充分必要条件是 $\dim V_1 = \dim V_2$ 。

5. 在线性空间 $\mathbb{F}^m$ 中, 证明:

1. 存在 $\mathbb{F}^m$ 的非零子空间 V , 使得 V 中任一非零向量的分量均不为零;
2. 若 $\mathbb{F}^m$ 的非零子空间 U 中任一非零向量的分量均不为零, 则 $\dim U = 1$ 。

6. 求由向量 α_i 生成的子空间与由向量 β_i 生成的子空间的交与和空间的基与维数:
$$\begin{cases} \alpha_1 = (1, 2, 1, 0)^T, \\ \alpha_2 = (-1, 1, 1, 1)^T, \end{cases}$$
- $$\begin{cases} \beta_1 = (2, -1, 0, 1)^T, \\ \beta_2 = (1, -1, 3, 7)^T. \end{cases}$$

7. 设 V_1, V_2, V_3 是列向量空间 V 的子空间, 举例说明:

$$V_1 \cap (V_2 + V_3) = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$$

未必成立。

8. 设 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 是列向量空间 V 的一个基, 证明: 对任意 $1 \leq i \leq n-1$, 有

$$V = \langle \xi_1, \dots, \xi_i \rangle \oplus \langle \xi_{i+1}, \dots, \xi_n \rangle.$$

提高题

9. 设 V_1, V_2 是列向量空间 V 的子空间。证明: $V_1 \cup V_2$ 是 V 的子空间的充分必要条件为 $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$ 。

10. 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 且 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{F}^m (1 \leq i \leq n)$ 。记

$$V = \{ AX \mid X \in \mathbb{F}^n \}.$$

证明:

1. V 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间;
2. $V = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$;
3. $\dim V = r(A)$ 。

11. 写出 $\mathbb{F}^m$ 的 $s (s \geq 2)$ 个子空间 $V_1, \dots, V_s$ 相应的维数公式, 并予以证明。

12. 设

$$U = \{(a_1, \dots, a_m)^T \in \mathbb{F}^m \mid a_1 = \dots = a_m\},$$

$$V = \{(a_1, \dots, a_m)^T \in \mathbb{F}^m \mid a_1 + \dots + a_m = 0\},$$

证明:

1. U, V 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间;
2. $\mathbb{F}^m = U \oplus V$ 。

13. 设 V_1, V_2 是列向量空间 V 的子空间, 且 $\dim V_1 = \dim V_2$ 。证明: 存在 V 的子空间 U , 使得 $V = U \oplus V_1 = U \oplus V_2$ 。

挑战题

14. 设 V 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间, 且 V 中每个非零向量的零分量个数不超过 r , 证明: $\dim V \leq r + 1$ 。

4.5 线性方程组解的结构

课后练习 (4.5.3) · 共 14 题 · 基础题5题 · 提高题8题 · 挑战题1题

基础题

1. 求下列数域 $\mathbb{F}$ 上齐次线性方程组的一个基础解系，并写出其通解。

$$\begin{aligned} 1. & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 0; \end{cases} \\ 2. & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases} \\ 3. & \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2. 设 $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 元非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的解， $c_1, \dots, c_s \in \mathbb{F}$ 。证明： $c_1\gamma_1 + \dots + c_s\gamma_s$ 是 $AX = \beta$ 的解的充分必要条件为 $c_1 + \dots + c_s = 1$ 。

3. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

的通解。

4. 已知 $(1, 1, 1)^T$ **是线性方程组**

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5 - \lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5 - \lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$$

的一个解，试求该线性方程组的通解。

5. 用sage写一个函数，以线性方程组的系数矩阵 A **和右端项** β **为输入，利用**`rref()`**命令，输出方程组** $Ax = \beta$ **的一个特解和对应齐次方程组的一个基础解系。**

提高题

6. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, $a, b \in \mathbb{F}$,

$$\beta_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2, \beta_2 = a\alpha_2 + b\alpha_3, \dots, \beta_{s-1} = a\alpha_{s-1} + b\alpha_s, \beta_s = a\alpha_s + b\alpha_1,$$

试问 a, b 满足什么关系时, $\beta_1, \dots, \beta_s$ 也是 $AX = 0$ 的一个基础解系。

7. 设 B 是数域 $\mathbb{F}$ 上 $(n-1) \times n$ 矩阵, 把 B 划去第 j 列得到的 $n-1$ 阶子式记作 D_j , 令 $\eta = (D_1, -D_2, \dots, (-1)^{n+1}D_n)^T$ 。证明:

1. η 是齐次线性方程组 $BX = 0$ 的一个解;
2. 如果 $\eta \neq 0$, 那么 η 是齐次线性方程组 $BX = 0$ 的一个基础解系。

8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 4 维列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 。已知齐次线性方程组 $AX = 0$ 的通解为 $k(0, 1, 1, 0)^T$, 求齐次线性方程组 $(\text{adj} A)X = 0$ 的一个基础解系。

9. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times k$ 矩阵。证明:

1. $r(AB) = r(B)$ 的充要条件是线性方程组 $ABX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解;
2. 若 $r(AB) = r(B)$, 则对任意 $k \times l$ 矩阵 C , 有 $r(ABC) = r(BC)$ 。

10. 设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵。证明:

1. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解都是 $BX = 0$ 的解的充分必要条件是 B 的行向量组可由 A 的行向量组线性表出;
2. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解的充分必要条件是 A 的行向量组与 B 的行向量组等价。

11. 证明: 对于任意 $m \times n$ 复矩阵 A , 有 $r(\overline{A}^T A) = r(A \overline{A}^T) = r(A)$ 。

12. 证明：对任意 $m \times n$ 实矩阵 A 和 m 维实列向量 β ，线性方程组

$$A^T A X = A^T \beta$$

必有解。

13. 设 γ 是非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的一个特解， $\eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 是相应齐次线性方程组的一个基础解系。证明： $\gamma, \gamma + \eta_1, \gamma + \eta_2, \dots, \gamma + \eta_{n-r}$ 是线性方程组 $AX = \beta$ 解集的一个极大线性无关组。

挑战题

14. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是一个线性无关 n 维列向量组，证明：必存在以 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 为基础解系的齐次线性方程组

第五章

标准内积空间——无解方程组的最小二乘解

- 5.1 标准内积及其几何意义 (8 题)
- 5.2 正交投影与最小二乘解 (9 题)
- 5.3 标准正交基与Gram-Schmidt正交化过程 (6 题)

5.1 标准内积及其几何意义

课后练习 (5.1.4) · 共 8 题 · 基础题4题 · 提高题4题

基础题

1. 给出标准内积空间性质的详细证明。

2. 记

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

计算

1. $u \cdot u$, $v \cdot u$ 和 $\frac{v \cdot u}{u \cdot u}$;
2. $w \cdot w$, $x \cdot w$ 和 $\frac{x \cdot w}{w \cdot w}$;
3. $\frac{1}{w \cdot w}w$, $\frac{1}{u \cdot u}u$;
4. $\left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right)v$, $\left(\frac{x \cdot w}{x \cdot x}\right)x$;
5. $\|w\|$ 和 $\|x\|$ 。

3. 将下列向量单位化:

$$u = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. 求下列每组向量间的距离和夹角:

1. $x = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$ 和 $y = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$;

2. $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $v = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ 。

提高题

5. 利用标准内积证明2阶行列式的几何意义, 即2阶行列式的绝对值等于其行(或列)向量组张成的平行四边形面积。

6. 平行四边形法则：设 u, v 都是标准内积空间 $\mathbb{R}^n$ 中一对向量，则

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

7. 设 α, β 和 γ 是标准内积空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量，求证：

1. 当 $\alpha \neq \beta$ 时， $d(\alpha, \beta) > 0$ ；
2. $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$ ；
3. $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$ 。

8. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 、 $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是两个同阶矩阵，证明不等式：

$$(\text{tr}(AB^T))^2 \leq \text{tr}(AA^T)\text{tr}(BB^T).$$

5.2 正交投影与最小二乘解

课后练习 (5.2.5) · 共 9 题 · 基础题2题 · 提高题3题 · 挑战题4题

基础题

1. 判断下述向量对是否正交:

$$1. a = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$2. u = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$3. u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$4. x = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 15 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

2. 求线性方程组 $AX = \beta$ 的最小二乘解, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

提高题

3. 设 V_1, V_2 都是标准内积空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间。求证：

1. $(V_1^\perp)^\perp = V_1$;
2. 若 $V_1 \subseteq V_2$, 则 $V_2^\perp \subseteq V_1^\perp$;
3. $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$;
4. $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$ 。

4. 设 U 是下列齐次线性方程组的解空间：

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

试求：

1. $U^\perp$;
2. $U^\perp$ 适合的线性方程组。

5. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \beta \in \mathbb{R}^m$, 证明：线性方程组 $AX = \beta$ 有解的充分必要条件是 β 与 $A^T X = 0$ 的解空间正交。

挑战题

6. 证明命题 5.2.17。

7. 证明命题 5.2.18。

8. 证明命题 5.2.19。

9. 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满秩分解为 $A = BC$ ，证明其MP广义逆为

$$A^\dagger = C^\dagger B^\dagger.$$

举例说明当 $A = BC$ 不是满秩分解时，存在 $A^\dagger \neq C^\dagger B^\dagger$ 的情形。

5.3 标准正交基与Gram-Schmidt正交化过程

课后练习 (5.3.5) · 共 6 题 · 基础题2题 · 提高题3题 · 挑战题1题

基础题

1. 判断下列向量组是否是正交向量组:

1. $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};$

2. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

3. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix};$

4. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix};$

5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. 验证下述向量组中的 v_1, v_2, v_3 构成一组标准正交基, 并将 w 表示为 v_1, v_2, v_3 的线性组合。

$$1. v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$2. v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}。$$

提高题

3. 在4维欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 求与向量组

$$\alpha_1 = (1, 2, 2, -1)^T, \alpha_2 = (1, 1, -5, 3)^T, \alpha_3 = (3, 2, 8, -7)^T$$

等价的一个标准正交向量组。

4. 设 A 是一个列满秩矩阵。若在 A 的QR分解中进一步要求 R 的对角线元素均为正数, 则 R 称为 A 的**标准QR分解**。证明: A 的标准QR分解是唯一的。

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A 的标准QR分解。

挑战题

6. 设 V 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, P 是一个 n 阶方阵。求证: 若 P 满足

$$P\alpha = \text{Proj}_V(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n,$$

则 P 是正交投影矩阵, 且 $V = \text{Im}P$ 。

第六章

一般线性空间与线性映射

- 6.1 一般线性空间的定义与举例 (8 题)
- 6.2 坐标与基变换 (8 题)
- 6.3 线性映射 (9 题)
- 6.4 线性映射的运算 (8 题)
- 6.5 同构映射与线性空间同构 (9 题)
- 6.6 线性映射的表示矩阵 (7 题)
- 6.7 线性映射的像与核 (12 题)
- 6.8 商空间与线性映射的结构 (6 题)

6.1 一般线性空间的定义与举例

课后练习 (6.1.5) · 共 8 题 · 基础题3题 · 提高题5题

基础题

1. 判断下列集合对于给定的运算是否构成相应数域上的线性空间:

1. 复数域 $\mathbb{C}$ 对于数的加法和数乘在实数域 $\mathbb{R}$ 上是否构成线性空间?
2. 实数域 $\mathbb{R}$ 对于数的加法和数乘在复数域 $\mathbb{C}$ 上是否构成线性空间?
3. 与给定的方阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可交换的所有 n 阶实方阵对于矩阵的加法和数乘是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间?
4. $\mathbb{R}$ 上的区间 $[0, 1]$ 上所有单调递增连续实函数对于函数的加法和数乘在 $\mathbb{R}$ 上是否构成线性空间?
5. $\mathbb{R}$ 上的区间 $[0, 1]$ 上满足 $f(1) = 0$ 的连续实函数对于函数的加法和数乘在 $\mathbb{R}$ 上是否构成线性空间?

2. 重新定义 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵的加法为

$$A \oplus B = BA - AB,$$

则所有 n 阶方阵的集合关于加法 $\oplus$ 和普通矩阵数乘是否构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间?

3. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $\alpha, \beta \in V$, $c \in \mathbb{F}$, 证明:

$$1. c(\alpha - \beta) = c\alpha - c\beta;$$

$$2. (c - d)\alpha = c\alpha - d\alpha.$$

提高题

4. 考虑下面 2×2 实矩阵的集合

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. C 关于矩阵的加法和数乘是否构成 $\mathbb{C}$ 上的线性空间? 若构成线性空间, 求其维数与一个基。

2. C 关于矩阵的加法和数乘是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间? 若构成线性空间, 求其维数与一个基。

5. 考虑下面 2×2 复矩阵的集合

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

1. H 关于矩阵的加法和数乘是否构成 $\mathbb{C}$ 上的线性空间? 若构成线性空间, 求其维数与一个基。

2. H 关于矩阵的加法和数乘是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间? 若构成线性空间, 求其维数与一个基。

6. 考虑下面两个数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵的集合，它们对于矩阵的加法和数乘是否构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间？若构成线性空间，求其维数与一个基。

1. $V_1 = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid A^\top = A\}$;

2. $V_2 = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} \mid A^\top = -A\}$ 。

7. 设 V 为一般线性空间， V_1, V_2 为 V 的两个子空间，证明 $V_1 \oplus V_2$ 当且仅当 $V_1 \cap V_2 = 0$ 。

8. 证明：在线性空间所应满足的10条运算性质中（定义6.1.1和定义6.1.2），加法的交换律可由其他性质推导出。

6.2 坐标与基变换

课后练习 (6.2.5) · 共 8 题 · 基础题4题 · 提高题4题

基础题

1. 给定 $\alpha = (2, 1, 3)^T \in \mathbb{R}^3$, 求:

1. α 在基 $(\xi_1 = (1, 0, 0)^T, \xi_2 = (0, 1, 0)^T, \xi_3 = (0, 0, -1)^T)$ 下的坐标;
2. α 在基 $(\xi_1 = (1, 0, 0)^T, \xi_2 = (0, 0, 1)^T, \xi_3 = (0, 1, 0)^T)$ 下的坐标;
3. α 在基 $(\xi_1 = (1, 1, 0)^T, \xi_2 = (1, 0, 1)^T, \xi_3 = (0, 1, 1)^T)$ 下的坐标。

2. 设 $f(x) = x^5 + 4x^4 - 2x^2 - x + 1 \in \mathbb{F}[x]_5$, 求:

1. $f(x)$ 在基 $(x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1)$ 下的坐标;
2. $f(x)$ 在基 $((x-1)^5, (x-1)^4, (x-1)^3, (x-1)^2, x-1, 1)$ 下的坐标。

3. 在 $\mathbb{F}^{2 \times 2}$ 中, 设

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

求从基 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ 到 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ 的过渡矩阵。

4. 设 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 为 n 维线性空间 V 的一个基。

1. 证明: $(\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \dots, \xi_1 + \dots + \xi_n)$ 也是 V 的一个基;

2. 若向量 α 在基 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 下的坐标为 $(n, n-1, \dots, 2, 1)^T$, 求 α 在基 $(\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \dots, \xi_1 + \dots + \xi_n)$ 下的坐标。

提高题

5. 设 n 阶方阵 T 为从线性空间 V 的基 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 到基 $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ 的过渡矩阵, 证明: T^{-1} 是从基 $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ 到基 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 的过渡矩阵。

6. 设 $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ 为 n 维线性空间 V 的一个基, 若 V 中向量 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 与 n 阶方阵 A 满足关系

$$(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)A,$$

证明: $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 也是 V 的一组基。

7. 设 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的一个基, $k \in \mathbb{F}$, 且 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$ 。

1. 证明: $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 也是 V 的一个基;
2. 当 k 为何值时, 存在非零向量 ξ , 使得它在基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 和基 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 下的坐标相同? 并求所有满足上述条件的 ξ 的集合。

8. 考虑次数不超过 $n-1$ 的多项式构成的线性空间 $\mathbb{F}[x]_{n-1}$, 设有 n 个两两不同的数 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$, 且设

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - c_j), \quad i = 1, \dots, n.$$

1. 证明 $(f_1(x), \dots, f_n(x))$ 是 $\mathbb{F}[x]_{n-1}$ 的一个基;
2. 求 $f(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$ 在基 $(f_1(x), \dots, f_n(x))$ 下的坐标。

6.3 线性映射

课后练习 (6.3.3) · 共 9 题 · 基础题4题 · 提高题4题 · 挑战题1题

基础题

1. 判断下面的映射是不是线性映射？

1. $\phi: \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3, (x, y, z)^T \mapsto (x + 3y, y - z, z + 4x)^T$;

2. $\phi: \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3, (x, y, z)^T \mapsto (xy, yz, zx)^T$;

3. $\phi: V \rightarrow V, \alpha \mapsto \alpha_0$, 其中 V 是线性空间, $\alpha_0 \in V$ 是预先给定的一个向量;

4. $\phi: V \rightarrow V, \alpha \mapsto \alpha + \alpha_0$, 其中 V 是线性空间, $\alpha_0 \in V$ 是预先给定的一个向量;

5. $\phi: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m, \alpha \mapsto A\alpha + \beta$, 其中 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, \beta \in \mathbb{F}^m$;

6. $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$, 此处我们将复数域 $\mathbb{C}$ 看成是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间。

2. 设 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, 给定 $c \in \mathbb{F}$, 考虑 V 到 V 的映射 $\phi: \alpha \mapsto c\alpha$, 证明: ϕ 为线性变换。(形如 ϕ 的线性变换被称为数乘变换)

3. 给定矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$, 证明:

$$\phi: \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}^{m \times m}, X \mapsto AXB$$

是线性映射。

4. 考虑连续函数空间 $C[a, b]$ 到自身的映射 $\phi: f \mapsto \int_a^x f(t)dt$, 判断 ϕ 是否是 $C[a, b]$ 上的线性变换。

提高题

5. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 的线性空间, $\dim V = 1$, $\phi \in \mathcal{L}(V, V)$ 。证明: 存在 $c \in \mathbb{F}$, 使得对任意 $\alpha \in V$, 都有 $\phi(\alpha) = c\alpha$ 。

6. 设 V, U 是有限维线性空间, V' 是 V 的子空间。证明: 对于任意 V' 到 U 的线性映射 $\phi' \in \mathcal{L}(V', U)$, 总存在 V 到 U 的线性映射 $\phi \in \mathcal{L}(V, U)$ 使得 $\phi(\alpha) = \phi'(\alpha), \forall \alpha \in V'$ 。(换言之, 子空间 V' 上的线性映射 ϕ' 总可以推广成全空间 V 的线性映射)

7. 设 $\phi: V \rightarrow U$ 是从线性空间 V 到线性空间 U 的线性映射, 证明: 若 U' 是 U 的子空间, 则 $\{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) \in U'\}$ 是 V 的子空间。

8. 设 V 为线性空间, 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V$ 线性相关, 又设 U 是维数大于等于 1 的线性空间。证明: 可以找到 U 中的 k 个向量 $\beta_1, \dots, \beta_k \in U$ 使得, 不存在 V 到 U 的线性映射 $\phi \in \mathcal{L}(V, U)$ 满足 $\phi(\alpha_i) = \beta_i, \forall i \in [k]$ 。

挑战题

9. (原书此处题目正文空缺, 此题可略过)

6.4 线性映射的运算

课后练习 (6.4.3) · 共 8 题 · 基础题4题 · 提高题3题 · 挑战题1题

基础题

1. 设 V, U 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间, $\phi, \psi, \delta \in \mathcal{L}(V, U)$ 是从 V 到 U 的线性映射, 证明:

1. $\phi + (\psi + \delta) = (\phi + \psi) + \delta$;

2. $c(\phi + \psi) = c\phi + c\psi, \forall c \in \mathbb{F}$ 。

2. 证明线性映射乘法有单位元, 即命题 6.4.7。

3. 证明线性映射乘法满足结合律, 即命题 6.4.6。

4. 设 V 是线性空间, ϕ 是从 V 到 V 的线性变换。定义 ϕ 的零次幂为 $\phi^0 := \text{id}_V$; 对于整数 $k \geq 1$, 递归定义 ϕ 的 k 次幂为 $\phi^k := \phi\phi^{k-1}$ 。证明: 对于任意正整数 $k \geq 0$, ϕ^k 都是 V 上的线性变换。

提高题

5. 设有从线性空间 $\mathbb{F}[x]$ 到 $\mathbb{F}[x]$ 的映射

$$\phi : f(x) \mapsto f'(x), \quad \psi : f(x) \mapsto xf(x),$$

其中 $f'(x) \in \mathbb{F}[x]$ 是多项式 $f(x)$ 的形式导数。证明: ϕ, ψ 都是线性变换, 且 $\phi\psi - \psi\phi = \text{id}_{\mathbb{F}[x]}$ 。

6. 设 ϕ, ψ 是线性空间 V 上的线性变换。证明: 若 $\phi\psi - \psi\phi = \text{id}_V$, 则

$$\phi^k\psi - \psi\phi^k = k\phi^{k-1}, \quad \forall k \geq 1.$$

7. 设 ϕ, ψ 是线性空间 V 上的线性变换, 且 $\phi^2 = \phi$, $\psi^2 = \psi$ 。证明: $(\phi + \psi)^2 = \phi + \psi$ 当且仅当 $\phi\psi = \psi\phi = 0$, 其中 0 表示 V 上的零变换。(注: 满足 $\phi^2 = \phi$ 的线性变换也被称为幂等变换)

挑战题

8. (原书此处题目正文空缺, 此题可略过)

6.5 同构映射与线性空间同构

课后练习 (6.5.3) · 共 9 题 · 基础题5题 · 提高题3题 · 挑战题1题

基础题

1. 设 ϕ 是从线性空间 V 到线性空间 U 的同构映射, 证明: ϕ^{-1} 是从 U 到 V 的同构映射。
2. 设 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 是线性空间 V 的一个基, $\phi: V \rightarrow V$ 是 V 上的线性变换, 证明: ϕ 是双射当且仅当 $\phi(\xi_1), \dots, \phi(\xi_n)$ 线性无关。
3. 设 ϕ 是从线性空间 V 到 U 的同构映射, V_1, V_2 是 V 的子空间, 证明:

$$\phi(V_1 + V_2) = \phi(V_1) + \phi(V_2) \quad \text{且} \quad \phi(V_1 \cap V_2) = \phi(V_1) \cap \phi(V_2).$$

4. 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 是可逆矩阵, 定义 $\phi_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n, \alpha \mapsto A\alpha$, 证明: ϕ_A 是同构映射。

5. 考虑第6.1.5节的习题6.1.5.5中的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

证明: H 与 $\mathbb{R}^4$ 同构, 并写出 H 到 $\mathbb{R}^4$ 的一个同构映射。

提高题

6. 设有矩阵 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 令 $M = \{AB \mid B \in \mathbb{F}^{n \times n}\} \subseteq \mathbb{F}^{n \times n}$ 。

1. 证明: M 是 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 的子空间;
2. 设 A 的秩为 $r(A) = r$, 证明: $M \cong \mathbb{F}^{r \times n}$ 。

7. 设 $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 满足 $r(A) = r(B)$, 设 U 是 $AX = 0$ 的解空间, W 是 $BX = 0$ 的解空间, 证明: $U \cong W$, 并给出 U 到 W 的一个同构映射。

8. 设 V, V' 都是 n 维线性空间, ϕ 是 V 到 V' 的线性映射, 证明: ϕ 是单射当且仅当 ϕ 是满射。(换言之, 对于两个维数相同的线性空间之间的线性映射, 我们仅需要单射或满射条件就能保证它是同构映射)

挑战题

9. (原书此处题目正文空缺, 此题可略过)

6.6 线性映射的表示矩阵

课后练习 (6.6.4) · 共 7 题 · 基础题4题 · 提高题3题

基础题

1. 设 $n \geq 1$, 定义 $\mathbb{F}[x]_{n-1}$ 到 $\mathbb{F}[x]_n$ 的映射 ϕ 如下:

$$\phi(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \cdots + \frac{1}{n}a_{n-1}x^n,$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$.

1. 证明: ϕ 是线性映射;
2. 求 ϕ 在 $\mathbb{F}[x]_{n-1}$ 的基 $(1, x, \dots, x^{n-1})$ 和 $\mathbb{F}[x]_n$ 的基 $(1, x, \dots, x^{n-1}, x^n)$ 下的矩阵。

2. 设 V, U, W 为线性空间, $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 为 V 的基, $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ 为 U 的基, $(\zeta_1, \dots, \zeta_p)$ 为 W 的基, 又设线性映射 $\phi \in \mathcal{L}(V, U)$ 在 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 和 $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ 下的表示矩阵为 A , 线性映射 $\psi \in \mathcal{L}(U, W)$ 在 $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ 和 $(\zeta_1, \dots, \zeta_p)$ 下的表示矩阵为 B . 证明: $\psi\phi$ 在基 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 和 $(\zeta_1, \dots, \zeta_p)$ 下的表示矩阵为 BA .

3. 设 V 和 U 为线性空间, $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 为 V 的基, $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ 为 U 的基, ϕ 是 V 到 U 的线性映射, 且在 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 和 $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ 下的表示矩阵为 A 。若矩阵 B 与 A 相抵, 证明: B 为 ϕ 在另一对 V 和 U 的基下的表示矩阵。

4. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间, 证明: V 上所有线性函数构成的线性空间, 即 $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$, 同构于 $\mathbb{F}^n$ 。

提高题

5. 设 V 是 n 维线性空间, U 是 m 维线性空间, ϕ 是从 V 到 U 的线性映射, 证明: 存在 V 的一个基 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 和 U 的一个基 $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ 使得 ϕ 在这两个基下的表示矩阵形如

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

6. 设 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 是线性空间 V 的一个基, $\eta_1, \dots, \eta_n$ 是有限维线性空间 U 中的 n 个向量, 命题6.6.1表明存在唯一的从 V 到 U 的线性映射使得 $\phi(\xi_i) = \eta_i, \forall i \in [n]$ 。证明:

1. ϕ 是单射当且仅当 $\eta_1, \dots, \eta_n$ 线性无关;
2. ϕ 是满射当且仅当 $U = \langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$, 即向量 $\eta_1, \dots, \eta_n$ 可以生成线性空间 U 。

7. 设 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 是线性空间 V 的一个基, $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ 是线性空间 U 的一个基, ϕ 是从 V 到 U 的线性映射且 ϕ 在 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 和 $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ 下的表示矩阵为 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 证明:

1. ϕ 是单射当且仅当 A 是列满秩矩阵;
2. ϕ 是满射当且仅当 A 是行满秩矩阵。

6.7 线性映射的像与核

课后练习 (6.7.3) · 共 12 题 · 基础题4题 · 提高题7题 · 挑战题1题

基础题

1. 对线性映射 $\phi: \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}, A \mapsto \text{tr} A$, 求 $\text{Ker } \phi$ 和 $\text{Im } \phi$, 并求它们的一个基和维数。

2. 考虑第6.6.4节习题6.6.4.1中的从 $\mathbb{F}[x]_{n-1}$ 到 $\mathbb{F}[x]_n$ 的线性映射 ϕ :

$$\phi(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \cdots + \frac{1}{n}a_{n-1}x^n,$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$. 求 $\text{Ker } \phi$ 和 $\text{Im } \phi$ 以及它们的维数。

3. 设 V, U, W 是有限维线性空间, $\phi \in \mathcal{L}(V, U), \psi \in \mathcal{L}(U, W)$, 证明:

$$\dim \text{Ker } \psi\phi \leq \dim \text{Ker } \phi + \dim \text{Ker } \psi.$$

4. 设 V, U 是有限维线性空间, $\phi \in \mathcal{L}(V, U)$, 证明: 存在 V 的子空间 V' 使得 $V' \cap \text{Ker } \phi = 0$ 且 $\text{Im } \phi = \{\phi(\alpha) \mid \alpha \in V'\}$ 。

提高题

5. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, $\phi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$, 证明: 若存在 $\alpha \in V \setminus \text{Ker } \phi$, 则

$$V = \text{Ker } \phi \oplus \langle \alpha \rangle.$$

6. 设 V, U 是数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, $\phi \in \mathcal{L}(V, U)$, $(\eta_1, \dots, \eta_r)$ 是 $\text{Im } \phi$ 的一个基。证明: 存在 $\psi_1, \dots, \psi_r \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ 使得

$$\phi(\alpha) = \psi_1(\alpha)\eta_1 + \dots + \psi_r(\alpha)\eta_r, \quad \forall \alpha \in V.$$

7. 设 V 是 n 维线性空间, U 是 m 维线性空间, $\phi \in \mathcal{L}(V, U)$ 是从 V 到 U 的线性映射且是单射, 证明: 存在 U 到 V 的满射 ψ 使得 $\psi\phi = \text{id}_V$ 。

8. 设 V, U 是有限维线性空间, ϕ 是从 V 到 U 的线性映射。证明下列三个命题是等价的。

1. ϕ 是单射;
2. 对于任意从 U 到 V 的线性映射 ψ, ψ' , 若 $\phi\psi = \phi\psi'$, 则 $\psi = \psi'$;
3. 存在从 U 到 V 的线性 ψ 使得 $\psi\phi = \text{id}_V$ 。

9. 设 V, U 是有限维线性空间, ϕ 是从 V 到 U 的线性映射。证明下列三个命题是等价的。

1. ϕ 是满射;
2. 对于任意从 U 到 V 的线性映射 ψ, ψ' , 若 $\psi\phi = \psi'\phi$, 则 $\psi = \psi'$;
3. 存在从 U 到 V 的线性 ψ 使得 $\phi\psi = \text{id}_U$ 。

10. 设 ϕ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, i 是任意正整数, 证明:

$$\dim(\operatorname{Im} \phi^{i-1} \cap \operatorname{Ker} \phi) = \dim \operatorname{Ker} \phi^i - \dim \operatorname{Ker} \phi^{i-1}.$$

11. 从线性映射的观点证明Sylvester不等式:

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n,$$

其中, $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times p}$ 。

挑战题

12. 从线性映射的观点证明:

$$r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B),$$

其中, 矩阵 A, B, C 的维数使 ABC 相乘合法。

6.8 商空间与线性映射的结构

课后练习 (6.8.4) · 共 6 题 · 基础题4题 · 提高题2题

基础题

1. 验证定义6.8.7中同余类加法和数乘满足定义6.1.1和定义6.1.2中的10条性质。

2. 设 W 为 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 中所有反对称矩阵构成的子空间, 求 $\mathbb{F}^{n \times n}/W$ 的维数和一个基。

3. 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $\mathbb{F}^n$ 的子空间 $\text{Ker } A$ 是 n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解集。证明: 商空间 $\mathbb{F}^n / \text{Ker } A$ 中的任一元素是以 A 为系数矩阵的某个 n 元线性方程组的解集。

4. 设有线性映射 $\phi \in \mathcal{L}(V, U)$, 定义 π 如下:

$$\pi: V \rightarrow V / \text{Ker } \phi, \alpha \mapsto \alpha + \text{Ker } \phi.$$

则定义 6.8.10中的 $\tilde{\phi}$ 是满足下面关系的唯一同构映射:

$$\phi = \tilde{\phi}\pi.$$

提高题

5. 设 U, W 都是线性空间 V 的子空间。证明：若 $V = U \oplus W$ ，则 $U \cong V/W$ 。

6. 设 U, W 都是线性空间 V 的子空间，证明： $(U + W)/W \cong U/(U \cap W)$ 。

第七章

线性变换

- 7.1 线性变换与矩阵相似 (15 题)
- 7.2 不变子空间 (10 题)
- 7.3 特征值与特征向量 (18 题)
- 7.4 可对角化 (12 题)
- 7.5 零化多项式 (10 题)
- 7.6 λ -矩阵相抵与矩阵相似 (4 题)
- 7.7 λ -矩阵的相抵标准型 (9 题)
- 7.8 初等因子组与Jordan标准型 (19 题)
- 7.9 Jordan标准型与空间分解 (5 题)
- 7.10 Frobenius标准型和广义Jordan标准型 (7 题)

7.1 线性变换与矩阵相似

课后练习 (7.1.4) · 共 15 题 · 基础题7题 · 提高题7题 · 挑战题1题

基础题

1. 验证相似关系是等价关系。

2. 设 $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 定义 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 上线性变换

$$\phi: \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times n}, X \mapsto AX - XA,$$

验证: ϕ 在 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 的标准基 $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ 下的矩阵也是对角矩阵。

3. 设线性变换 $\phi: \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3, (a, b, c)^T \mapsto (a, a+b, a+b+c)^T$,

1. 求 ϕ 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 下的矩阵;
2. 求 ϕ 在基 $(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1)$ 下的矩阵;
3. 求 ϕ 在基 $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_3 + \varepsilon_1)$ 下的矩阵;
4. 证明: ϕ 可逆, 并求出 ϕ^{-1} ;
5. 求 $2\phi - \phi^{-1}$ 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 下的矩阵。

4. 证明：多项式集合 $\mathbb{F}[x]$ 关于多项式加法，数乘和乘法三种运算构成一个有单位元的交换代数，且多项式代数与矩阵代数及线性变换代数都不同构。

5. 设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵。

1. 证明：若 A 可逆，则 AB 相似于 BA 。
2. 举例说明对一般的 n 阶方阵 A, B ，矩阵 AB 未必相似于 BA 。

6. 设 A 相似于 B ， C 相似于 D ，证明： $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 。

7. 设 A 相似于 B , 证明: 对任意正整数 m 和任意 $c \in \mathbb{F}$, 有

1. A^m 相似于 B^m ;
2. cA 相似于 cB ;
3. A^T 相似于 B^T ;
4. $\det A = \det B$;
5. $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$;
6. A 可逆当且仅当 B 可逆, 且 A^{-1} 相似于 B^{-1} ;
7. $A^2 = A$ 当且仅当 $B^2 = B$ 。

提高题

8. 设 ϕ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上线性变换。证明: 如果 ϕ 在 V 的任意一个基下的矩阵都相同, 则 ϕ 是数乘变换, 即存在 $c \in \mathbb{F}$, 使得 $\phi = \operatorname{cid}_V$ 。

9. 设 ϕ 是线性空间 V 上的线性变换, $\alpha \in V$ 。若存在正整数 k , 使得

$$\phi^{k-1}(\alpha) \neq 0, \phi^k(\alpha) = 0,$$

证明: 向量组 $\alpha, \phi(\alpha), \dots, \phi^{k-1}(\alpha)$ 线性无关。

10. 设 ϕ 是线性空间 V 上的线性变换, $0 \neq \alpha \in V$, k 是一个正整数。证明: 若 $\phi^k(\alpha)$ 可以由向量组

$$\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \dots, \phi^{k-1}(\alpha) \quad (7.1.2)$$

线性表出, 则对任意的正整数 $j \geq k$, $\phi^j(\alpha)$ 也可以由 (7.1.2) 线性表出。

11. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 是 V 的一个基, 定义 V 上的线性变换使得

$$\phi(\alpha_i) = \alpha_{i+1} (i = 1, \dots, n-1), \phi(\alpha_n) = 0,$$

1. 求 ϕ 在基 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 下的矩阵 A ;
2. 证明: $\phi^n = 0, \phi^{n-1} \neq 0$;
3. 设 ψ 是 V 上线性变换且满足 $\psi^n = 0, \psi^{n-1} \neq 0$, 证明: 存在 V 的一个基 $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, 使得 ψ 在这个基下的矩阵也是 A 。

12. 设 ϕ, ψ 都是 V 上幂等变换, 即 $\phi^2 = \phi, \psi^2 = \psi$, 证明: $\phi + \psi$ 是幂等变换的充分必要条件是 $\phi\psi = \psi\phi = 0$ 。

13. 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 定义线性变换 $\phi: \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}^{n \times n}, X \mapsto AXB$, 证明: ϕ 是可逆变换的充分必要条件是 A, B 为可逆矩阵。

14. 给定 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$, 证明: A 相似于 A^T , 并求可逆矩阵 P 使得 $A^T = P^{-1}AP$ 。

挑战题

15. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间, 是否存在 V 上线性变换 ϕ, ψ 使得 $\phi\psi - \psi\phi = \text{id}_V$? 若是, 请给出例子; 若否, 请加以证明。

对于数域 $\mathbb{F}$ 上无限维线性空间, 上述结论是否成立?

7.2 不变子空间

课后练习 (7.2.3) · 共 10 题 · 基础题2题 · 提高题7题 · 挑战题1题

基础题

1. 设 $\phi: \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^2$, $(a, b)^T \mapsto (b, a)^T$, 试求所有非平凡的 ϕ -不变子空间。

2. 设 V 是 4 维线性空间, V 上线性变换 ϕ 在基 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

1. 证明: $U = \langle \xi_1 + 2\xi_2, \xi_2 + \xi_3 + 2\xi_4 \rangle$ 是 ϕ -不变子空间;

2. 求 $\phi|_U$ 在基 $(\xi_1 + 2\xi_2, \xi_2 + \xi_3 + 2\xi_4)$ 下的矩阵。

提高题

3. 设 ϕ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 取定 $\lambda \in \mathbb{F}$, 记

$$V_{\lambda}^{(\phi)} = \{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) = \lambda\alpha\},$$

证明: $V_{\lambda}^{(\phi)}$ 是 ϕ -不变子空间。

4. 设 ϕ, ψ 是 n 维线性空间 V 上线性变换,

1. 若 $\phi\psi = \psi\phi$, 证明: $\text{Ker}\phi$ 与 $\text{Im}\phi$ 都是 ψ -不变子空间;
2. 若 $\phi^2 = \phi$, 证明: $\text{Ker}\phi$ 与 $\text{Im}\phi$ 都是 ψ -不变子空间的充分必要条件是 $\phi\psi = \psi\phi$ 。

5. 设 ϕ 是 n 维线性空间 V 上线性变换。证明: ϕ 是数乘变换当且仅当 V 的任意一维子空间均为 ϕ -不变子空间。

6. 不借助表示矩阵，直接从线性变换的角度证明命题 7.2.7。

7. 设 ϕ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换， ϕ 在基 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix},$$

证明：

1. 设 U 是 ϕ -子空间，且 $\xi_1 \in U$ ，则 $U = V$ ；
2. 对于任意非零 ϕ -子空间 U ，总有 $\xi_n \in U$ ；
3. V 不能分解为两个非平凡的 ϕ -子空间的直和。

8. 设 ϕ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明:

1. $\text{Ker}\phi \subseteq \text{Ker}\phi^2 \subseteq \text{Ker}\phi^3 \subseteq \cdots \subseteq \text{Ker}\phi^n \subseteq \cdots$;
2. $\text{Im}\phi \supseteq \text{Im}\phi^2 \supseteq \text{Im}\phi^3 \supseteq \cdots \supseteq \text{Im}\phi^n \supseteq \cdots$;
3. 存在正整数 s , 使得 $\text{Ker}\phi^s = \text{Ker}\phi^{s+1}$;
4. 存在正整数 t , 使得 $\text{Im}\phi^t = \text{Im}\phi^{t+1}$;
5. 若 $\text{Ker}\phi^s = \text{Ker}\phi^{s+1}$, 则对于任意正整数 i , 有 $\text{Ker}\phi^s = \text{Ker}\phi^{s+i}$;
6. 若 $\text{Im}\phi^t = \text{Im}\phi^{t+1}$, 则对于任意正整数 i , 有 $\text{Im}\phi^t = \text{Im}\phi^{t+i}$;
7. $\text{Ker}\phi^s = \text{Ker}\phi^{s+1}$ 的充分必要条件是 $\text{Im}\phi^s = \text{Im}\phi^{s+1}$;
8. 若 $\text{Ker}\phi^s = \text{Ker}\phi^{s+1}$, 那么 $V = \text{Ker}\phi^s \oplus \text{Im}\phi^s$ 。

9. 设 ϕ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $\dim \text{Im}\phi^2 = \dim \text{Im}\phi$, 证明: $\text{Im}\phi \cap \text{Ker}\phi = 0$ 。

挑战题

10. 设 ϕ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换， ϕ 在基 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix},$$

求 ϕ 的所有不变子空间。

7.3 特征值与特征向量

课后练习 (7.3.5) · 共 18 题 · 基础题6题 · 提高题7题 · 挑战题5题

基础题

1. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的幂等矩阵, 即 $A^2 = A$ 。证明: A 的特征值是0或1。
2. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的幂零矩阵, 即存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $A^k = 0$ 。证明: A 的特征值都是0。
3. 求数域 $\mathbb{F}$ 上矩阵 A 的全部特征值和特征向量:
(1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, 其中 $b \neq 0$ 。
4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 、 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似, 求 a, b 和 A 的特征值。

5. 设3阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -4$, 求 $\text{tr}(A)$ 和 $\det A$ 。

6. 设 $X = (a_1, \dots, a_n)$ 且 $XX^T = 1$, 求 $E_n - 2X^T X$ 的特征值。

提高题

7. 设 A 是 $\mathbb{C}$ 上 $m \times n$ 矩阵, λ 是 $\overline{A}^T A$ 的一个特征值, 证明: λ 是非负实数。

8. 证明: 如果任意非零向量都是方阵 A 的特征向量, 则 A 是数量矩阵。

9. 设 α, β 是矩阵 A 对应于不同特征值 λ, μ 的特征向量, 证明: $\alpha + \beta$ 不是 A 的特征向量。

10. 设 ϕ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, V 有一个子空间直和分解 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$, 其中 V_i 是 ϕ -不变子空间。设 ϕ 限制在 V_i 上的特征多项式为 $\chi_i(\lambda)$, 证明: ϕ 的特征多项式 $\chi_\phi(\lambda) = \chi_1(\lambda)\chi_2(\lambda) \cdots \chi_m(\lambda)$ 。

11. 设 ϕ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换, λ_0 是 ϕ 的一个特征值, n_0 是 λ_0 在特征多项式 $\chi_\phi(\lambda)$ 中的重数, 证明: $\dim V_{\lambda_0} \leq n_0$ 。

12. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶可逆矩阵, 特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 证明:

1. $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征值;
2. $(\det A)\lambda_1^{-1}, (\det A)\lambda_2^{-1}, \dots, (\det A)\lambda_n^{-1}$ 是 $\text{adj} A$ 的全部特征值。

13. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + (a+2)x_2 + (a+1)x_3 = a+3 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3 \end{cases}$$

有无穷多解, A 是 3 阶方阵, $X_1 = (1, a, 0)^T, X_2 = (-a, 1, 0)^T, X_3 = (0, 0, a)^T$ 为 A 的属于特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1$ 的特征向量。

1. 求 A ;
2. 求 $\det(\operatorname{adj} A + 2E)$ 。

挑战题

14. 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间, ϕ, ψ 是 V 上的线性变换, 且 $\phi\psi = \psi\phi$, 证明:

1. 如果 λ_0 是 ϕ 的一个特征值, 那么 V_{λ_0} 是 ψ -不变子空间;
2. ϕ, ψ 至少有一个公共的特征向量。

15. 设 $\mathbb{C}$ 上 m 个 n 阶方阵 $A_1, \dots, A_m$ 满足

$$A_i A_j = A_j A_i \quad (i, j = 1, \dots, m),$$

证明： $A_1, \dots, A_m$ 至少有一个公共的特征向量。

16. 设 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = BA$ ，证明：存在可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 同时为上三角矩阵。

17. 设 ϕ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换， W 是 ϕ -子空间。如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 是 ϕ 的分别属于 k 个不同特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 的特征向量，且 $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \in W$ ，证明： $\dim W \geq k$ 。

18. 设 $\Gamma = \{W_1, \dots, W_r\}$ 为 r 个各不相同的可逆 n 阶复矩阵构成的集合。若该集合关于矩阵乘法封闭（即 $\forall M, N \in \Gamma$, 有 $MN \in \Gamma$ ）。证明： $\sum_{i=1}^r W_i = 0$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^r \text{tr}(W_i) = 0$ ，其中 $\text{tr}(W_i)$ 表示 W_i 的迹。

7.4 可对角化

课后练习 (7.4.4) · 共 12 题 · 基础题2题 · 提高题9题 · 挑战题1题

基础题

1. 判断矩阵 A 是否可对角化。若可对角化, 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵, 并求 A^n 。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 已知 A 与 B 相似, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. 求 a 的值;

2. 求满足 $P^{-1}AP = B$ 的可逆矩阵 P 。

提高题

3. 设 A 是 n 阶矩阵, $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{F}^n$, 且 $X_n \neq 0$ 。若

$$AX_1 = X_2, AX_2 = X_3, \dots, AX_{n-1} = X_n, AX_n = 0.$$

1. 证明: $X_1, \dots, X_n$ 线性无关;
2. 求 A 的特征值和特征向量;
3. 问 A 是否可对角化。

4. 设 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T, \beta = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 且 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, n > 1$ 。令 $A = \beta\alpha^T$ 。试问: A 是否可对角化? 如果 A 可对角化, 求出一个可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 并且写出这个对角矩阵。

5. 设 $A = (a_{ij})$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶上三角矩阵, 证明:

1. 若 $a_{11}, \dots, a_{nn}$ 互不相等, 则 A 可对角化;
2. 若 $a_{11} = \dots = a_{nn}$, 且至少存在一个 $a_{kl} \neq 0 (k < l)$, 则 A 不可对角化。

6. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明: (1) A 可对角化; (2) $r(A) = \text{tr}(A)$ 。

7. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上秩为 r 的 n 阶方阵,

1. 证明: $A^2 = A$ 的充分必要条件是存在 $r \times n$ 行满秩矩阵 B 及 $n \times r$ 列满秩矩阵 C , 使得 $A = CB$ 且 $E_r = BC$;
2. 当 $A^2 = A$ 时, 证明: $\det(2E - A) = 2^{n-r}$, $\det(A + E) = 2^r$ 。

8. 若实矩阵 A 满足 $A^2 - A + 2E = 0$, 证明: A 在实数域上不可对角化。

9. 设数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = BA$, 且 A 有 n 个不同的特征值, 证明: B 可对角化。

10. 设 ϕ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换, 证明下列命题是等价的:

1. ϕ 可对角化;
2. $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_t}$, 这里 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 是 ϕ 的全部互异特征值;
3. $\sum_{i=1}^t \dim V_{\lambda_i} = n$, 这里 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 是 ϕ 的全部互异特征值。

11. 设 ϕ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换, 且满足 $\phi^2 + \phi = 2\text{id}_V$ 。

证明: (1) ϕ 的特征值是1和-2; (2) $V = V_1 \oplus V_{-2}$ 。

挑战题

12. (原书此处题目正文空缺, 此题可略过)

7.5 零化多项式

课后练习 (7.5.4) · 共 10 题 · 基础题4题 · 提高题5题 · 挑战题1题

基础题

1. 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 记

$$T(A) = \{f(x) | f(x) \in \mathbb{F}[x], f(A) = 0\}.$$

证明: $T(A)$ 关于多项式组合封闭, 即对 $\forall f(x), g(x) \in T(A)$, $\forall u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$, 都有

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) \in T(A).$$

2. 举例说明特征值相同的矩阵未必相似, 极小多项式相同的矩阵未必相似。

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A 的极小多项式 $m_A(\lambda)$, 并判断 A 是否可对角化。

4. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}^n$, 且 $\alpha^T \beta = 1$ 。令 $A = E_n - \alpha \beta^T$, 求 A 的极小多项式 $m_A(\lambda)$, 并判断 A 是否可对角化。

提高题

5. 设 n 阶可逆矩阵 A 的极小多项式 $m_A(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_m$, 求 A^{-1} 的极小多项式 $m_{A^{-1}}(\lambda)$ 。

6. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵, 证明: $m_A(\lambda) = m_{A^T}(\lambda)$ 。

7. 设 $A = \text{diag}\{A_1, \dots, A_s\}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, 其中 $A_i (i = 1, \dots, s)$ 是 n_i 阶方阵。证明 A 可对角化的充分必要条件是每个 $A_i (i = 1, \dots, s)$ 都可对角化。

8. 设 A, B 都是 n 阶可对角化矩阵, 并且 $AB = BA$, 证明: A, B 可同时对角化, 即存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是对角矩阵。

9. 设 A, B 分别是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶、 m 阶矩阵, 其极小多项式分别为 $m_A(\lambda), m_B(\lambda)$, 若 $(m_A(\lambda), m_B(\lambda)) = 1$, 证明: 矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解。

挑战题

10. 设 S 是无限个可对角化的 n 阶方阵组成的集合, 其元素满足矩阵乘法交换律。证明: 存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $\forall X \in S, P^{-1}XP$ 为对角矩阵。

7.6 λ -矩阵相抵与矩阵相似

课后练习 (7.6.3) · 共 4 题 · 基础题2题 · 提高题1题 · 挑战题1题

基础题

1. 下列矩阵是否满秩? 是否可逆? 若可逆, 求其逆矩阵。

1. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

2. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 3 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$

2. 若 $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$, $C(\lambda) \simeq D(\lambda)$, 证明:

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) & 0 \\ 0 & C(\lambda) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} B(\lambda) & 0 \\ 0 & D(\lambda) \end{pmatrix}.$$

提高题

3. 设 $A(\lambda) = A_s\lambda^s + A_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0$ 且 $\deg A(\lambda) = s > 0$ 。证明：若 $A(\lambda)$ 可逆，则 $\det A_s = 0$ 且 $\det A_0 \neq 0$ 。

挑战题

4. 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $M(\lambda), N(\lambda)$ 是 n 阶 λ -矩阵，且满足

$$M(\lambda)(\lambda E - A) = (\lambda E - B)N(\lambda).$$

证明：

1. 存在 $R \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 及 λ -矩阵 $Q(\lambda)$ ，使得

$$M(\lambda) = (\lambda E - B)Q(\lambda) + R, \quad N(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda E - A) + R;$$

2. $M(\lambda)$ 可逆的充要条件是 $N(\lambda)$ 可逆，此时 R 可逆，进而 A 相似于 B 。

7.7 λ -矩阵的相抵标准型

课后练习 (7.7.5) · 共 9 题 · 基础题6题 · 提高题3题

基础题

1. 用初等变换的方法求下列矩阵的法式。

$$(1) \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 求 A 的特征矩阵的法式, 其中 $(1)A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $(2)A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 。

3. 设 n 阶矩阵 A 的特征矩阵的法式为

$$\text{diag}(1, \dots, 1, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_k(\lambda)),$$

证明: A 的特征多项式

$$\chi_A(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda).$$

4. 求下列矩阵的行列式因子与不变因子: (1) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ 。

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A 的行列式因子与不变因子。

6. 判断下列矩阵是否相似。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 。

提高题

7. 设 $(f(\lambda), g(\lambda)) = 1$, 证明下列3个 λ -矩阵相抵:

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

8. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \dots, D_n(\lambda)$ 是 A 的行列式因子, 证明: 存在 n 阶 λ -矩阵 $B(\lambda)$, 使得 $\text{adj}(\lambda E - A) = D_{n-1}(\lambda)B(\lambda)$ 且 $B(\lambda)$ 的一阶行列式因子为 1。

9. 对于任意 n 阶方阵 A , 证明: A 相似于 A^T 。

7.8 初等因子组与Jordan标准型

课后练习 (7.8.5) · 共 19 题 · 基础题6题 · 提高题8题 · 挑战题5题

基础题

1. 已知6阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为4, 初等因子组为

$$\lambda, \lambda, \lambda^3, \lambda + 1, (\lambda + 1)^3, \lambda - 2, (\lambda - 2)^2,$$

求 $A(\lambda)$ 的行列式因子和不变因子。

2. 已知矩阵 A 在 $\mathbb{R}$ 上的初等因子组为 $\lambda, \lambda^3, (\lambda - \sqrt{2})^2, (\lambda + \sqrt{2})^2, (\lambda^2 + 1)^3$, 求 A 的行列式因子和不变因子。

3. 求下列矩阵的初等因子组。

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

4. 设 A 的初等因子组为 $\lambda^2, \lambda + 1, (\lambda + 1)^3$, 求 A 的Jordan标准形。

5. 若 n 阶方阵 A 是幂零矩阵, 即有大于1的整数 k , 使得 $A^k = 0, A^{k-1} \neq 0$ 。求 A 的最后一个不变因子。

6. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, A 的行列式因子是 $1, \dots, 1, f(\lambda)$, 证明: $\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda)$ 。

提高题

7. 设 n 阶复方阵 A 不可逆且不是幂零矩阵, 证明: A 相似于矩阵

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

其中 B 是幂零矩阵, C 是可逆矩阵。

8. 设 $\mathbb{C}$ 上三阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ 。

1. 求出 A 所有可能的Jordan标准形；
2. 给出 A 可对角化的充分必要条件。

9. 设 A 是3阶方阵，满足 $A^2 = E$ ，试求 A 的所有可能的Jordan标准形。

10. 设 A 是3阶幂零矩阵，即存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $A^k = 0$ ，试求 A 的所有可能的Jordan标准形。

11. 设 A 是 n 阶幂等矩阵，且秩等于 r ，试求 A 的Jordan标准形。

12. 设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上3阶方阵，证明： A 相似于 B 的充分必要条件是 $m_A(\lambda) = m_B(\lambda)$ 且 $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ 。当 A, B 为4阶方阵时，情况如何？

13.

1. 设 a 是数域 $\mathbb{F}$ 中的非零数, 求 $J(a, n)^2$ 的Jordan标准形;
2. 设 A 是 n 阶可逆复方阵, 证明: 存在 n 阶复矩阵 B , 使得 $A = B^2$ 。

14. 设 A 是10阶方阵, 满足 $A^2(A - 2E)^2(A - E) = 0$, 且 $r(A) = 6$, $r(A - 2E) = 9$, $r(A - E) = 8$, 求 A 的Jordan标准形。

挑战题

15. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, 求 A 的Jordan标准形 J , 并求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$ 。

16. 证明：与 $J(\lambda_0, n)$ 可交换的矩阵一定可表示为 $J(\lambda_0, n)$ 的多项式。

17. 设 A 是 n 阶复方阵，且 $\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda)$ 。证明：若 $AB = BA$ ，则存在多项式 $f(\lambda)$ ，使得 $B = f(A)$ 。

18. 设 A 为 $2n$ 阶实方阵，且 $A^2 + E = 0$ ，证明： A 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$ 。

19. 设 A 是 $\mathbb{C}$ 上非零且不可逆的 n 阶复方阵, 若 $r(A) = r(A^2)$, 证明: A 相似于矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

其中 C 是 $r(A)$ 阶可逆矩阵。

7.9 Jordan标准型与空间分解

课后练习 (7.9.3) · 共 5 题 · 基础题2题 · 提高题2题 · 挑战题1题

基础题

1. 设 ϕ 是 $\mathbb{C}$ 上4维线性空间 V 的线性变换, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是 V 的一个基, 使得

$$\phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

1. 求 ϕ 的属于特征值1的特征子空间的一组基;
2. 求属于特征值1的根子空间的维数。

2. 已知线性变换 $\phi: \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3, X \mapsto AX$, 其中 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 试求 ϕ 的所有根子空间的基和维数。

提高题

3. 设 ϕ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换, A 是 ϕ 在某组基下的矩阵。证明: V 的每个根子空间都是循环子空间的充要条件是 A 的第 n 个行列式因子 $D_n(\lambda)$ 和第 n 个不变因子 $g_n(\lambda)$ 相等。

4. 设 ϕ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，证明下列叙述等价：

1. V 只有平凡的 ϕ -不变子空间；
2. V 中每个非零向量 α 都是循环向量，使 V 成为循环空间，即总有 $\alpha, \phi(\alpha), \dots, \phi^{n-1}(\alpha)$ 线性无关；
3. ϕ 的特征多项式在 $\mathbb{F}$ 上不可约。

挑战题

5. （原书此处题目正文空缺，此题可略过）

7.10 Frobenius标准型和广义Jordan标准型

课后练习 (7.10.3) · 共 7 题 · 基础题3题 · 提高题2题 · 挑战题2题

基础题

1. 设 $\mathbb{Q}$ 上的10阶方阵 A 的不变因子为

$$1, 1, \dots, 1, (\lambda - 2)^2(\lambda^2 + 2), (\lambda - 2)^2(\lambda^2 + 2)^2,$$

写出 A 的Frobenius标准形。

2. 写出下列矩阵 A 的Frobenius标准形:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. 设 A 的不变因子组为 $1, \dots, 1, (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1), (\lambda - 1)^3(\lambda^2 - 2)(\lambda^2 + 1)^2$, 分别在 $\mathbb{Q}$ 上和 $\mathbb{C}$ 上写出 A 的广义Jordan标准形。

提高题

4. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, 证明: 若 $\deg m_A(\lambda) = n$, 则 A 的 Frobenius 标准形是一个 Frobenius 块。

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} F((\lambda+1)^2(\lambda^2+\lambda+1)) & 0 \\ 0 & F((\lambda+1)(\lambda^2+\lambda+1)^2) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} F((\lambda+1)^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F(\lambda^2+\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F(\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F((\lambda^2+\lambda+1)^2) \end{pmatrix},$$

证明: A 相似于 B 。

挑战题

6. 不使用定理 7.8.17, 直接证明Frobenius块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{r-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$$

的特征多项式和极小多项式都是

$$f(\lambda) = \lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

7. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, 且 $\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda)$ 。用Frobenius标准形证明: 若 $AB = BA$, 则存在数域 $\mathbb{F}$ 上多项式 $f(\lambda)$, 使得 $B = f(A)$ 。

第八章

一般内积空间与线性映射

- 8.1 一般内积空间的定义和举例 (11 题)
- 8.2 标准正交基与内积空间同构 (11 题)
- 8.3 酉矩阵、正交矩阵与标准型 (12 题)
- 8.4 实对称矩阵和Hermite矩阵 (14 题)
- 8.5 奇异值分解——酉相抵标准型 (9 题)

8.1 一般内积空间的定义和举例

课后练习 (8.1.4) · 共 11 题 · 基础题4题 · 提高题6题 · 挑战题1题

基础题

1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 对于任意 $\alpha = (a_1, a_2)^T, \beta = (b_1, b_2)^T$, 规定

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + 2a_2 b_2,$$

判断 $\mathbb{R}^2$ 关于以上定义的 $(-, -)$ 能否构成欧氏空间。

2. 设 A 是 n 阶可逆复矩阵。在 $\mathbb{C}^n$ 中, 对任意 $X, Y \in \mathbb{C}^n$, 规定

$$(X, Y) = X^T A^T \overline{AY}.$$

证明: $\mathbb{C}^n$ 关于以上定义的 $(-, -)$ 构成酉空间。

3. 设 V 是实或复内积空间, $\alpha, \beta \in V$, 证明:

1. 若对任意 $v \in V$, $(\alpha, v) = 0$, 则 $\alpha = 0$;
2. 若对任意 $v \in V$, $(\alpha, v) = (\beta, v)$, 则 $\alpha = \beta$ 。

4. 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 求 $\alpha = (2, 1, 0, 2)^T$ 与 $\beta = (2, 1, -3, 2)^T$ 的夹角。

提高题

5. 设 V 是实或复内积空间, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in V$,

1. $\alpha \perp \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$;

2. 若 $\alpha \perp \alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 则对任意 $\xi \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$, 总有 $\alpha \perp \xi$ 。

6. 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是内积空间 V 的一个基, $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i, \beta = \sum_{i=1}^n y_i \xi_i \in V$ 。令

$$G = \begin{pmatrix} (\xi_1, \xi_1) & (\xi_1, \xi_2) & \cdots & (\xi_1, \xi_n) \\ (\xi_2, \xi_1) & (\xi_2, \xi_2) & \cdots & (\xi_2, \xi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\xi_n, \xi_1) & (\xi_n, \xi_2) & \cdots & (\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix},$$

证明:

1. $(\alpha, \beta) = X^T G \bar{Y}$, 其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$;

2. G 是可逆矩阵。

7. 对于实内积空间 $C[-1, 1]$ ，内积定义为

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx,$$

求 $\|1\|$ 。

8. 设 V 是实内积空间，证明：

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} (\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2), \quad \forall \alpha, \beta \in V.$$

(这个恒等式称为极化恒等式。)

9. 设 V 是实内积空间, $\alpha, \beta \in V$, 证明:

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2.$$

当 V 是几何空间时, 说明这个恒等式的几何意义。

10. 在实或复内积空间 V 中, 定义 $d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$ 为两个向量 α, β 间的距离, 证明:

1. $d(\alpha, \beta) \geq 0$;
2. $d(\alpha, \beta) = 0$ 当且仅当 $\alpha = \beta$;
3. $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$;
4. $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$ 。

挑战题

11. (原书此处题目正文空缺, 此题可略过)

8.2 标准正交基与内积空间同构

课后练习 (8.2.4) · 共 11 题 · 基础题6题 · 提高题5题

基础题

1. 在 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上, 定义内积为 $(A, B) = \text{tr}(A\overline{B}^T)$, 试证: $E_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$ 是关于此内积的一个标准正交基。

2. 在4维酉空间 $\mathbb{C}^4$ 中, 求与向量组

$$\alpha_1 = (1, -1, i, 1)^T, \alpha_2 = (2, i, -1 + i, 1)^T$$

等价的一个标准正交向量组。

3. 判断以下矩阵是否为酉矩阵或正交矩阵, 并说明理由。

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}。$

4. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 满足 $A^2 + 4A + 3E_n = \mathbf{0}$ 。证明: $A + 2E_n$ 是正交矩阵。

5. 设 n 阶实矩阵 A 为正交矩阵, 证明: A 的行列式为 ± 1 。

6. 设 V_1, V_2 是 $\mathbb{C}^n$ 的两个子空间, 满足 $V_2 = \{\bar{\alpha} | \alpha \in V_1\}$ 。证明:

1. 映射 $\phi: V_1 \rightarrow V_2, \alpha \mapsto \bar{\alpha}$ 不是 V_1 到 V_2 的同构映射。
2. $(\xi_1, \dots, \xi_d)$ 是 V_1 的一个标准正交基当且仅当 $(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_d)$ 是 V_2 的一个标准正交基。

提高题

7. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是内积空间 V 的 n 个线性无关向量, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是这组向量经过 Gram-Schmidt 正交化过程得到的向量组 (未进行标准化), 证明:

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (\beta_i, \beta_i).$$

8. 证明: $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵且二阶正交矩阵只能是如上两种形式。

9. 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, 其中 $a_1 \in \mathbb{R}$ 且 $a_1 \neq 1$, $\beta \in \mathbb{R}^{n-1}$. 证明: 若 $\|\alpha\| = 1$, 则

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & \beta^T \\ \beta & E_{n-1} - \frac{1}{1-a_1} \beta \beta^T \end{pmatrix}$$

是正交矩阵。

10. 设 A, B 都是 n 阶正交矩阵, 且 $\det A + \det B = 0$, 证明: $\det(A + B) = 0$ 。

11. 设 η 是 n 维欧氏空间 V 上的一个单位向量, 定义 V 上线性变换 ϕ 如下:

$$\phi(\alpha) = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta, \forall \alpha \in V,$$

证明: ϕ 是正交变换。

8.3 酉矩阵、正交矩阵与标准型

课后练习 (8.3.4) · 共 12 题 · 基础题4题 · 提高题5题 · 挑战题3题

基础题

1. 证明：酉（正交）相似关系是等价关系。
2. 设 A 是 n 阶幂零矩阵，且 $A \neq 0$ ，证明： A 不可能酉相似于对角矩阵。
3. 设 A 是 n 阶正交矩阵且 $\det A = -1$ 。证明： -1 是 A 的特征值。
4. 设 A 是 n 阶正交矩阵，其特征值均为实数，证明： A 是实对称矩阵。

提高题

5. 设 ϕ 是欧氏空间 V 上的变换, 且对任意 $\alpha, \beta \in V$, 都有

$$(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = (\alpha, \beta),$$

证明: ϕ 是线性变换, 因而是正交变换。

6. 设 ϕ 是正交变换, U 是 ϕ -子空间, 证明: $U^\perp$ 也是 ϕ -子空间。

7. 设 ϕ 是酉变换, 证明: ϕ 的属于不同特征值的特征向量必正交。

8. 设 ξ, η 是 n 维欧氏空间 V 中两个不同的单位向量, 证明: 存在一个镜面反射 ϕ , 使得 $\phi(\xi) = \eta$ 。

9. 设 A 是 n 阶正交矩阵。证明： A 是第一类正交矩阵的充分必要条件是存在正交矩阵 B ，使得 $A = B^2$ 。

挑战题

10. 证明： n 维欧氏空间 V 中任意正交变换 ϕ 都可以表为一系列镜面反射的乘积。

11. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 是 n 维欧氏空间 V 中的两个向量组，证明：存在 V 上的一个正交变换 ϕ ，使得

$$\phi(\alpha_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

的充分必要条件是

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

12. 记

$$R_{xy} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}, \quad (\text{xoy平面上的旋转})$$

$$R_{yz} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}, \quad (\text{yoz平面上的旋转})$$

证明：对欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 上的第一类正交变换 A ，存在 $B_1, B_2 \in R_{xy}$ ， $C \in R_{yz}$ ，使得

$$A = B_1 C B_2.$$

8.4 实对称矩阵和Hermite矩阵

课后练习 (8.4.5) · 共 14 题 · 基础题5题 · 提高题8题 · 挑战题1题

基础题

1. 设 A, B 是 n 阶 Hermite 矩阵, $c \in \mathbb{C}$, 判断以下说法是否正确? 并说明理由。

1. $A + B$ 是 Hermite 矩阵;
2. cA 是 Hermite 矩阵;
3. AB 是 Hermite 矩阵;
4. ABA 是 Hermite 矩阵。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵。

3. 设 A 是 n 阶复正规矩阵, 证明: A 是 Hermite 矩阵的充分必要条件是 A 的特征值全是实数。

4. 设 A 是 n 阶复正规矩阵, 证明: A 是酉矩阵的充分必要条件是 A 的特征值全是模为1的复数。

5. 设 A 是 n 阶复正规矩阵, 证明: A 是幂零矩阵的充分必要条件是 $A = \mathbf{0}$ 。

提高题

6. 设 A 是 n 阶Hermite矩阵, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

7. 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}$ 是 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的一个排列。证明: $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 正交相似于 $\text{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$ 。

8. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明: 存在正交矩阵 Q , 使得

$$Q^{-1}AQ = Q^T A Q = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. 设 A, B 为 n 阶实对称矩阵, 且 $AB = BA$, 证明: 存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ, Q^{-1}BQ$ 同时为对角矩阵。

10. 设 A, B 是 n 阶Hermite矩阵, 证明: 若 AB 是Hermite矩阵, 且 λ 是 AB 的特征值, 则存在 A, B 的特征值 a, b 使得 $\lambda = ab$ 。

11. 设 ϕ 是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换, U 是 ϕ -不变子空间, 证明: $U^\perp$ 也是 ϕ -不变子空间。

12. 设 A 是 n 阶反对称实矩阵, λ 是 A 的特征根, 证明: λ 是零或纯虚数。

13. 设 ϕ 是欧氏空间 V 上的线性变换。如果对于任意 $\alpha, \beta \in V$,

$$(\phi(\alpha), \beta) = -(\alpha, \phi(\beta)),$$

则称 ϕ 反对称。证明:

1. ϕ 为反对称的充分必要条件是 ϕ 在一个标准正交基下的矩阵为反对称矩阵;
2. 如果 U 是反对称线性变换 ϕ 的不变子空间, 那么 $U^\perp$ 也是 ϕ -不变子空间。

挑战题

14. (原书此处题目正文空缺, 此题可略过)

8.5 奇异值分解——酉相抵标准型

课后练习 (8.5.6) · 共 9 题 · 基础题3题 · 提高题5题 · 挑战题1题

基础题

1. 验证酉相抵是等价关系。

2. 求下列矩阵的奇异值分解:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

3. 设 $A = U\Sigma V^H$ 是 $m \times n$ 阶矩阵 A 的奇异值分解, 求 A^H 的奇异值分解。

提高题

4. 设 $A = U\Sigma V^H$ 是 $m \times n$ 阶矩阵 A 的奇异值分解, $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ 是 A 的所有非零奇异值。用 u_j 、 v_j 分别表示 U 和 V 的第 j 列。证明:

1. $\{u_1, \dots, u_r\}$ 是 $\text{Im}(A)$ 的一组标准正交基;
2. $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ 是 $\text{Ker}(A^H)$ 的一组标准正交基;
3. $\{v_1, \dots, v_r\}$ 是 $\text{Im}(A^H)$ 的一组标准正交基;
4. $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ 是 $\text{Ker}(A)$ 的一组标准正交基。

5. 设 A 是 n 阶复方阵, 求证: AA^H 与 A^HA 相似。

6. 设 P 是 m 阶酉矩阵, $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 证明 A 与 PA 有相同的奇异值。

7. 设 $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ 是复矩阵 A 的所有非零奇异值。证明

$$\operatorname{tr}(A^H A) = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2.$$

8. 若 A 是Hermite矩阵，则 A 的奇异值恰是其非0特征值的绝对值。

挑战题

9. 设 σ_1 是复矩阵 A 的最大奇异值。证明

$$\sigma_1 = \max_{\alpha \neq 0} \frac{\|A\alpha\|}{\|\alpha\|}.$$

第九章

二次型

- 9.1 二次型与矩阵合同 (10 题)
- 9.2 合同变换和惯性定理 (14 题)
- 9.3 正定二次型和正定矩阵 (20 题)

9.1 二次型与矩阵合同

课后练习 (9.1.5) · 共 10 题 · 基础题5题 · 提高题4题 · 挑战题1题

基础题

1. 写出下列二次型的矩阵, 并求二次型的秩。

1. $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$;

2. $f(x_1, x_2) = x_1x_2$;

3. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$ 。

2. 设

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

求该二次型的矩阵。

3. 设 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2bx_2x_3$ 的秩为1, 求 a, b 的值。

4. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 证明: 若对任意 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 都有 $\alpha^T A \alpha = 0$, 那么 $A = 0$ 。

5. 用正交线性替换的方法将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

化为标准形, 并写出所作的正交线性替换。

提高题

6. 设

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n)^2,$$

其中 $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, n$, 证明: $f(x_1, \dots, x_n)$ 的秩等于矩阵 A 的秩, 其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 。

7. 设 a, b, c 是不全为0的实数, 求二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + bx_2 + cx_3)^2$$

的矩阵和秩。

8. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 证明: 存在正实数 c , 使得对任意 n 维列向量 X , 有

$$|X^T A X| \leq c X^T X.$$

9. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一个基, $A = ((\alpha_i, \alpha_j))_{n \times n}$ 称为基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的度量矩阵。证明: 同一个 n 维欧氏空间 V 在不同基下的度量矩阵合同。

挑战题

10. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，其特征值按大小排序为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n,$$

证明： $\lambda_1 = \max_{0 \neq X \in \mathbb{R}^n} \frac{X^T A X}{X^T X}, \lambda_n = \min_{0 \neq X \in \mathbb{R}^n} \frac{X^T A X}{X^T X}.$

9.2 合同变换和惯性定理

课后练习 (9.2.3) · 共 14 题 · 基础题6题 · 提高题4题 · 挑战题4题

基础题

1. 用矩阵初等变换的方法求二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

的标准形，并写出所作的非退化线性替换。

2. 设 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ ，把它化为规范形，并写出所作的非退化线性替换。

3. 求实二次型

$$f(x_1, \dots, x_{2n}) = x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots + x_{2n-1}x_{2n}$$

的正、负惯性指数及符号差。

4. 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ 是 n 元实二次型。若 $\mathbb{R}^n$ 中存在列向量 α_1, α_2 , 使得 $\alpha_1^T A \alpha_1 > 0, \alpha_2^T A \alpha_2 < 0$, 证明: 存在 $0 \neq \alpha_3 \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\alpha_3^T A \alpha_3 = 0$ 。

5. 下列实二次型对应的矩阵中哪些是合同的? 写出理由。

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3, \\ f_2(y_1, y_2, y_3) &= y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3, \\ f_3(z_1, z_2, z_3) &= -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3. \end{aligned}$$

6. n 阶实对称矩阵组成的集合按合同关系进行分类, 共有几个合同类?

提高题

7. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 A 可逆, 证明: 在 $\mathbb{R}$ 上,

1. A 合同于 A^{-1} ;
2. 当 $\det A > 0$ 时, A 合同于 $\text{adj} A$ 。

8. 确定二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1x_2 + bx_1x_3 + cx_2x_3$ 的秩和符号差。

9. 证明：一个 n 元实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式之积的充分必要条件是：它的秩等于1，或者它的秩等于2且符号差为0。

10. 设 $f(x_1, \dots, x_n)$ 是秩为 n 的实二次型，证明：若 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的符号差为 s ，则存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $\frac{1}{2}(n - |s|)$ 维子空间 V ，使得对任意 $(a_1, \dots, a_n)^T \in V$ ，都有 $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ 。

挑战题

11. 设实二次型

$$f(x_1, \dots, x_n) = z_1^2 + \dots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \dots - z_{k+s}^2,$$

其中 $z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j (1 \leq i \leq k+s)$ 。证明 f 的正惯性指数 $p \leq k$, 负惯性指数 $q \leq s$ 。

12. 记 p_M 为实对称矩阵 M 的正惯性指数, 证明: 对任意 n 阶实对称矩阵 A, B ,

$$p_{A+B} \leq p_A + p_B.$$

13. 设 A 是 n 阶实可逆矩阵, 求

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$$

的正负惯性指数。

14. 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实方阵, 满足

1. $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = a > 0$;

2. 对每个 $i (i = 1, \dots, n)$, 有 $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{j=1}^n |a_{ji}| < 4a$ 。

求二次型 $f(X) = X^T A X$ 的规范形。

9.3 正定二次型和正定矩阵

课后练习 (9.3.5) · 共 20 题 · 基础题5题 · 提高题12题 · 挑战题3题

基础题

1. 设 A, B 是 n 阶正定矩阵, 证明: BAB 也是正定矩阵。

2. 设 A 是 n 阶正定矩阵, 证明: $\det(A + E) > 1$ 。

3. 判断下列二次型是否正定:

1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$;

2. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$;

3. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 + 8x_3^2$ 。

4. 当且仅当 t 取何值时, 下列二次型是正定的:

1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2tx_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$

2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2t(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$

5. 当且仅当 t 取何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

是负定二次型。

提高题

6. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵, 证明:

1. $a_{ii} > 0, i = 1, \dots, n;$

2. $2|a_{ij}| < a_{ii} + a_{jj}, i \neq j;$

3. A 的所有元素中, 绝对值最大的元素一定在主对角线上。

7. 设 A 是 n 阶正定矩阵, B 是 $n \times m$ 实矩阵, 证明: $B^T A B$ 正定的充分必要条件是 $r(B) = m$ 。

8. 设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times m$ 实矩阵,

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m)^2.$$

证明: $f(x_1, \dots, x_m)$ 正定的充分必要条件是 A 为列满秩矩阵。

9. 设 $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 其中 B 是 n 阶矩阵, D 是 m 阶矩阵, C 是 $n \times m$ 矩阵, 证明: B , D 以及 $D - C^T B^{-1} C$ 均是正定矩阵。

10. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶正定矩阵, 证明

$$1. \det A \leq a_{nn} A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{bmatrix};$$

$$2. \det A \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

11. 设 $P = (p_{ij})$ 是 n 阶可逆矩阵, 证明:

$$(\det P)^2 \leq \prod_{j=1}^n (p_{1j}^2 + p_{2j}^2 + \cdots + p_{nj}^2).$$

12. 设 A 是 n 阶正定矩阵, 证明: 对任意非零向量 $\alpha \in \mathbb{C}^n$, 有 $\alpha^H A \alpha > 0$ 。

13. 设 V 是 n 维欧氏空间, 证明: 对任意一个 n 阶正定矩阵 A , 都存在 V 的一组基 $\xi_1, \dots, \xi_n$, 使得 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 的度量矩阵为 A 。

14. 设

$$f(x_1, \dots, x_n) = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

证明: $f(x_1, \dots, x_n)$ 是半正定二次型。

15. 设 A 是 n 阶半正定矩阵, $X \in \mathbb{R}^n$, 证明: $X^T A X = 0$ 当且仅当 $A X = 0$ 。

16. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶半正定矩阵, 令

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

证明: 若 $\det A_k \neq 0$, 则 A_k 是正定矩阵。

17. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 证明: 存在 n 阶正定矩阵 B 和负定矩阵 C , 使得

$$A = B + C.$$

挑战题

18. 设 A 是 n 阶半正定矩阵, 证明: 存在唯一一个半正定矩阵 B , 使得 $A = B^2$ 。

19. 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 。证明：存在半正定矩阵 R 和酉矩阵 U ，使得

$$A = RU.$$

20. 设 A, B, C 是 n 阶正定矩阵，

$$P(t) = At^2 + Bt + C, \quad f(t) = \det P(t),$$

其中 t 为未定元。证明：若 λ 是 $f(t)$ 的根，则 $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ ，这里 $\operatorname{Re}(\lambda)$ 表示 λ 的实部。