9.3 正定二次型和正定矩阵

高等代数 https://gdfzu.club

正定二次型与正定矩阵

定义

设 $f(x_1,\ldots,x_n)=X^TAX$ 是实二次型，其中 A 是 n 阶实对称矩阵。如果对任意非零实向量 $X=(a_1,\ldots,a_n)^T$，恒有

$$f(a_1,\ldots,a_n)=X^TAX>0,$$

则称 A 是正定矩阵，称该二次型是正定二次型。

说明

1. 正定二次型必须是实二次型;
2. 若 $f(x_1,\dots,x_n)$ 是正定二次型,则
$$f(c_1,\dots,c_n)=0 \Leftrightarrow c_1=\cdots=c_n=0.$$
3. 若二次型
$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,$$
其中 $a_{ij}=a_{ji}$ 是正定的,则对任意 $1\le i\le n$,都有 $a_{ii}>0$。

例

讨论下面二次型的正定性:

1. $f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$;
2. $f_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2+2x_2x_3$

对角元与正定性

- 对角元 $a_{ii} > 0, i = 1, 2, \ldots, n$ 是矩阵 A 正定的必要非充分条件。

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

例

- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$；
- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$

正定型的判定

命题

可逆线性替换不改变二次型的正定性。

定理

设 A 是实对称矩阵，则下列命题等价:

1. A 是正定矩阵；
2. A 的正惯性指数为 n；
3. A 合同于 n 阶单位矩阵；
4. 存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 $A = P^T P$；
5. A 的特征值全大于 0。

正定型的判定

推论

设 A 是正定的，则 $\det A > 0$。

例子

例

1. 设 A, B 是正定阵，则 $A+B$ 为正定阵；
2. 设 A 是正定阵，$k>0$，则 kA 是正定阵；
3. 设 A，B 是正定阵，且 $AB=BA$，则 AB 为正定阵；
4. 设 A 是正定阵，则 A^{-1}，$\mathrm{adj}A$ 为正定阵。

正定矩阵与扰动

例

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^TAX$ 经过正交替换 $X = QY$ 后化为标准形 $f = y_1^2 + y_2^2$，且 Q 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$，

1. 求 A;
2. 证明 $A + E$ 为正定矩阵。

正定矩阵与扰动

例

1. 当 A 为实对称矩阵，则存在充分大的 a，使得 $aE + A$ 为正定阵。
2. 设 B 是 $m \times n$ 阶实矩阵，则对任意 $b > 0$，$bE + B^T B$ 为正定阵。

主子式与顺序主子式

定义

A 的k 阶主子式:

$$A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}$$

A 的k 阶顺序主子式:

$$A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

正定二次型与正定矩阵

定理

n 阶实对称矩阵 A 是正定阵的充分必要条件是它的 n 个顺序主子式全大于零。

例

求 a 的取值范围，使

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + x_4^2 \\ &\quad +2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \end{aligned}$$

为正定二次型。

正定二次型与正定矩阵

定理

$A^T = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则下列条件等价:

1. A 是正定阵。
2. 对任意 $0 \neq X \in \mathbb{R}^n$，有 $X^TAX > 0$。
3. 存在可逆阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得 $P^TAP = E$。
4. 存在可逆阵 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得 $A = Q^TQ$。
5. A 的正惯性指数 $p = n$。
6. A 的所有顺序主子式 > 0。
7. A 的所有主子式 > 0。

双线性函数

定义

设 U 是一个 m 维实线性空间，V 是一个 n 维实线性空间，$\phi: U \times V \to \mathbb{R}$ 是 $U \times V$ 到 $\mathbb{R}$ 上的映射。若 ϕ 关于它的两个变量都是线性的，即

1. 对 $\forall X_1, X_2 \in U$，$Y \in V$，$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$，都有
$$\phi(c_1X_1 + c_2X_2, Y) = c_1\phi(X_1, Y) + c_2\phi(X_2, Y);$$
2. 对 $\forall\, X \in U$，$Y_1, Y_2 \in V$，$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$，都有
$$\phi(X, c_1Y_1 + c_2Y_2) = c_1\phi(X, Y_1) + c_2\phi(X, Y_2);$$

则称 ϕ 是 U, V 上的双线性函数。特别的，若进一步有 $U = V$，则也称 ϕ 是 V（或 U）上的数量积。

度量矩阵

定义

设 ϕ 是 n 维实线性空间 V 的一个数量积函数，选定的 V 一个基 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$，称矩阵

$$\begin{pmatrix} \phi(\varepsilon_1, \varepsilon_1) & \cdots & \phi(\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & \cdots & \phi(\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

为 V 上数量积函数 ϕ 在基 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ 下的 度量矩阵。

数量积与矩阵乘法

命题

设 ϕ 是 n 维实线性空间 V 上数量积函数，ϕ 在 V 的一个基 $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ 下的度量矩阵为 A。对 $\forall \alpha, \beta \in V$，记这两个向量在基 $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ 下的坐标向量分别为 X 和 Y，则

$$\phi(\alpha, \beta) = X^T AY.$$

正定矩阵与内积

定理

设 ϕ 是 n 维实线性空间 V 上数量积函数，ϕ 在 V 的一个基 $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ 下的度量矩阵为 A。则 ϕ 是 V 上的内积当且仅当 A 是正定矩阵。

半正定二次型

定义

设 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX$ 是实二次型。

- 如果对任意 $X = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \neq 0$，恒有

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = X^T AX > 0,$$

则称 A 是正定矩阵，称该二次型是正定二次型。

- 如果对任意 $X = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \neq 0$，恒有

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = X^T AX \geq 0,$$

则称 A 是半正定矩阵，称该二次型是半正定二次型。

其它分类

- 如果对任意 $X=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T\neq 0$，恒有
$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=X^TAX<0,$$
则称 A 是负定矩阵，称该二次型是负定二次型。

- 如果对任意 $X=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T\neq 0$，恒有
$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=X^TAX\leq 0,$$
则称 A 是半负定矩阵，称该二次型是半负定二次型。

- 若存在 $X_1=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T\neq 0$，使 $X_1^TAX_1>0$，且存在 $X_2=(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T\neq 0$，使 $X_2^TAX_2<0$，则 A 是不定矩阵，称该二次型是不定型。

例子

例

设 $d_i > 0$，$1 \leq i \leq n$。

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$；
2. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_r x_r^2$, $r \leq n$；
3. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -d_1 x_1^2 - d_2 x_2^2 - \cdots - d_n x_n^2$；
4. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -d_1 x_1^2 - d_2 x_2^2 - \cdots - d_r x_r^2$, $r \leq n$；
5. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 - x_2^2$

例

设 n 阶矩阵 A 正定，证明 $f(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} A & y \\ y^T & 0 \end{vmatrix}$ 是负定的，其中 y 是 n 维列向量。

二次型的分类与惯性指数

定理

设实二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX$ 的正惯性指数为 p，负惯性指数为 q，秩为 r。则

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX$ 是正定 $\Leftrightarrow p = n$；
2. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX$ 是半正定 $\Leftrightarrow p = r \leq n$；
3. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX$ 是负定 $\Leftrightarrow q = n$；
4. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX$ 是半负定 $\Leftrightarrow q = r \leq n$；
5. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX$ 是不定 $\Leftrightarrow p > 0$ 且 $q > 0$。

二次型的分类与惯性指数

- 实对称矩阵 A 负定 $\Leftrightarrow -A$ 正定。

定理

$A^T = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则下列条件等价:

1. A 是负定矩阵。
2. A 的负惯性指数 $q = n$。
3. 存在可逆阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得 $P^T AP = -E$。
4. 存在可逆阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得 $A = -P^T P$。
5. A 的所有特征值均小于 0。
6. A 的所有奇数阶顺序主子式 < 0，所有偶数阶顺序主子式 > 0。
7. A 的所有奇数阶主子式 < 0，所有偶数阶主子式 > 0。

半正定矩阵

定理

设 A 是实对称矩阵，则下列命题等价:

1. A 是半正定矩阵;
2. 对任意 $\varepsilon > 0$，$\varepsilon E + A$ 是正定矩阵;
3. A 的正惯性指数 $p = r$;
4. A 的特征值全大等于 0;
5. 存在矩阵 C，使得 $A = C^T C$;
6. A 的所有主子式全大于等于0。

推论

设 A 是半正定，则 $\det A \geq 0$。

注意

- 实对称矩阵 A 的所有顺序主子式都大于或等于 $0 \nRightarrow A$ 是半正定矩阵。

- 反例:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$