9.2 合同变换和惯性定理

高等代数 https://gdfzu.club

合同与初等变换

例

讨论以下运算的含义

1. $E(i,j)^T AE(i,j)$
2. $E(i(c))^T AE(i(c))$
3. $E(i,j(c))^T AE(i,j(c))$

合同变换

- 设对称矩阵 A 与矩阵 B 合同，即存在可逆矩阵 P，使得 $B = P^T AP$。
- 若 $P = Q_1 Q_2 \cdots Q_s$，其中 Q_i 为初等矩阵，则

$$\begin{aligned} P^T AP &= Q_s^T \cdots Q_2 Q_1^T A Q_1 Q_2 \cdots Q_s \\ &= Q_s^T (\cdots (Q_2^T (Q_1^T A Q_1) Q_2) \cdots) Q_s \end{aligned}$$

就相当于对 A 作 s 次合同变换化为 B。

合同与初等变换

引理

对一个对称矩阵 A 实施下述三种变换都是合同变换，每一个合同变换也都是这三种变换的合成。

1. 对换 A 的第 i 行与第 j 行, 再对换第 i 列与第 j 列;
2. 将 A 的第 i 行乘以非零常数 k , 再将第 i 列乘以相同的常数 k;
3. 将 A 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行上, 再将 k 乘以第 i 列加到第 j 列上。

引理

设 A 是数域 $\mathbb{R}$ 上的非零对称矩阵，则必存在可逆矩阵 P，使得 $P^T AP$ 的第 $(1,1)$ 元不等于 0。

定理

设 A 是 $\mathbb{R}$ 上秩为 r 的 n 阶对称矩阵，则存在 $\mathbb{R}$ 上可逆矩阵P，使得 $P^T AP$ 为对角矩阵

$$P^T AP = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- 用二次型语言来说就是: 对 $\mathbb{R}$ 上秩为 r 的 n 元二次型 $f(x_1, \ldots, x_n) = X^T AX$，总可以经过可逆线性替换 $X = PY$ 化为

$$f(x_1, \ldots, x_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2$$

上式称为二次型的标准形。

例

化下列二次型为标准型，并写出相应的非退化线性替换。

1. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[E(1,2(\frac{1}{2}))]{E(2,1(\frac{1}{2}))}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E(1,3(\frac{1}{2}))]{E(3,1(\frac{1}{2}))}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[E(2,3(1))]{E(3,2(1))}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以，作可逆线性替换 $X = PY$，其中

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可得标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2.$$

例

2. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

$$
\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow{E(1,2(1))}
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[E(2,1(1))]{}
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[E(1,2(-\frac{1}{2}))]{E(2,1(-\frac{1}{2}))}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[E(1,3(-1))]{E(3,1(-1))}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以，作非退化线性替换 $X = PY$，其中

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可得标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 - y_3^2.$$

标准形的不唯一性和不变量

- 二次型的标准形不是唯一的，与所作的非退化线性替换有关。

  如：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

  作非退化线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 作非退化线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

  得标准型 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2-y_3^2$

  得标准型 $f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2-z_2^2-z_3^2$

- 二次型经过非退化线性替换所得的标准形中，系数不为零的平方项的个数是唯一确定的，与所作的非退化线性替换无关。

- 二次型标准形中系数不为零的平方项的个数等于该二次型的秩。

问题

- 如何化二次型为标准形?
- 标准形唯一吗?
- 标准形的分类?

实二次型的规范形

定理

A 是 $\mathbb{R}$ 上对称矩阵，则存在 $\mathbb{R}$ 上可逆矩阵 C，使得

$$C^T A C = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $p+q=r$。

- 上式称为 $\mathbb{R}$ 上对称矩阵在合同关系下的规范形。

二次型语言

- 用二次型的语言：若 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是 $\mathbb{R}$ 上秩为 r 的 n 元二次型，则必存在非退化线性替换，使

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

这里 $p + q = r$。
$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2$ 称之为实二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的规范形。

说明

- 实二次型的规范形中平方项的系数只有 1,−1,0。
- 实二次型的规范形中平方项的系数中 1 的个数与 −1 的个数之和 $=f$ 的秩 $= r(A)$ 是唯一确定的。
- 问题：实二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的规范形中系数 1 的个数与系数 −1 的个数是否唯一确定？即实二次型的规范形是否唯一？

惯性定理

定理 惯性定理

设 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是 $\mathbb{R}$ 上 n 元二次型，若在非退化线性替换 $X = BY$ 与 $X = CZ$，分别将 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 化为两个规范形:

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

$$z_1^2 + \cdots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

则必有 $p = k$。称 p 为正惯性指数；q 为负惯性指数; $s = p - q$ 为符号差。

推论

推论

设 A, B 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶对称矩阵，则下列条件等价:

1. A 合同于 B;
2. A 与 B 有相同的正惯性指数和负惯性指数;
3. A 与 B 有相同的秩与符号差;
4. A 与 B 的正特征值的个数相同且负特征值的个数相同。

推论

正惯性指数 $p =$ 正特征值个数；负惯性指数 $q =$ 负特征值个数。

例子

例

试分别在 $\mathbb{R}$ 上和 $\mathbb{C}$ 上判断下列矩阵是否合同? 相似? 相抵?

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

例子

例

设 A 是对角矩阵，试分别在复数域和实数域上讨论 A 合同于单位矩阵的充分必要条件。

例

把相互合同的对称矩阵作为一个类.
复数域上 n 阶对称阵，按合同关系分类共有 ______ 类。
实数域上 n 阶对称阵，按合同关系分类共有 ______ 类。

例子

例

设 A, B 是实对称矩阵，

$$C = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}.$$

p_A, p_B, p_C 分别表示 A, B, C 的正惯性指数，q_A, q_B, q_C 分别表示 A, B, C 的负惯性指数，r_A, r_B, r_C 分别表示 A, B, C 的秩，s_A, s_B, s_C 分别表示 A, B, C 的符号差。则

$$p_C = p_A + p_B, \quad q_C = q_A + q_B,$$

$$r_C = r_A + r_B, \quad s_C = s_A + s_B.$$

例子

例

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$。

1. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的所有特征值;
2. 若二次型的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$，求 a 的值。

例

设 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^TAX$ 是实二次型, 若 $\det A < 0$。证明必存在一组实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，使得

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < 0.$$

例子

例

设实二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_{k+s}^2,$$

其中 $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (1 \leq i \leq k+s)$。证明 f 的正惯性指数 $p \leq k$，负惯性指数 $q \leq s$。