9 二次型

9.1 二次型与矩阵合同

高等代数 https://gdfzu.club

二次型与对称矩阵

定义

数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 $\mathbb{R}$ 上的n 元二次型，简称实二次型。

例子

例

判断下列多元多项式是否为二次型:

1. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2 + 3$;
2. $2x_1^3 + 3c_1^2x_2 + x_1x_2x_3$;
3. $2x_1^2 + \sqrt{2}x_1x_3$。

说明

1. 为了计算和讨论的方便，定义中 $x_ix_j(i<j)$ 的系数写成 $2a_{ij}$。
2. 定义中的公式也可写成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j$$

3. 约定 $a_{ij}=a_{ji},i<j$，于是公式可改写为

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\
&\quad +a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\
&\quad +\cdots+\cdots\\
&\quad +a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j
\end{aligned}$$

二次型与对称矩阵

定义

改写二次型为

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= X^T A X \end{aligned}$$

这里 $A^T = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$X \in \mathbb{R}^n$。$A$ 称为二次型 f 的矩阵，f 称为对称矩阵 A 的二次型。

- 矩阵 A 的秩也称为是二次型 f 的秩。

说明

注意：

1. 二次型的矩阵总是对称矩阵，即 $A^T = A$。
2. 二次型的矩阵 A 中，a_{ii} 为 x_i^2 的系数，$a_{ij}(i \neq j)$ 为 $x_i x_j$ 系数的一半。
3. 二次型与它的矩阵相互唯一确定，即设 $A^T = A$，$B^T = B$，则 $X^T A X = X^T B X$ 的充要条件是 $A = B$。

例子

例

求下列三元二次型的矩阵：

$$2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_1x_3.$$

例

若二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$$

的秩为 2，求 a, b 应满足的条件。

例子

例

求下列矩阵的三元二次型:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

问题

1. 是否二次型都可“变成”只含平方项?

2. 是否任何对称阵都可“变成”对角阵?

线性替换

定义

关系式

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \cdots + p_{1n}y_n \\ x_2 = p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \cdots + p_{2n}y_n \\ \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n = p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + \cdots + p_{nn}y_n \end{array}\right. \tag{2.1}$$

称为由变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的**线性替换**。

线性替换

记

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

(2.1) 可以表示为 $X=PY$。

当 P可逆矩阵时，线性替换称为可逆线性替换或非退化的线性替换。

当 P正交矩阵时，线性替换称为正交线性替换。

替换后的二次型与原二次型的关系

定理

二次型

$$f(x_1, \ldots, x_n) = X^T AX$$

经过可逆线性替换 $X = PY$ 化为

$$g(y_1, \cdots, y_n) = Y^T BY$$

的充分必要条件是存在可逆矩阵 P，使得

$$P^T AP = B.$$

合同

定义

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B$ 与 A 称为合同的，如果存在 n 阶可逆矩阵P，使得

$$B = P^T AP.$$

- $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵的合同关系是等价关系。
- 若 A 与 B 合同，则 A 与 B 相抵。
- 若 A 与 B 合同，则 A 与 B 的秩相同。
- 若 A 与 B 合同且 $A^T = A$，则 $B^T = B$。
- 若 A 与 B 合同且 $A^T = -A$，则 $B^T = -B$。
- 若 A 与 B 正交相似，则 A 与 B 相似且 A 与 B 合同。

例子

例

设

$$A=\mathbf{diag}(a_1,a_2,\dots,a_n),\ B=\mathbf{diag}(a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_n}),$$

其中 $(i_1,i_2,\dots,i_n)$ 是一个 n 级排列，则 A 与 B 合同。

二次型的标准形

定理

对 $\mathbb{R}$ 上 n 元二次型 $f(X)=X^TAX$，总可以经过正交线性替换 $X=QY$ 化为

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是实对称矩阵 A 的所有特征值。

例

用正交线性替换将二次型

$$f(x_1,x_2)=3x_1^2+3x_2^2-4x_1x_2$$

化为标准形，并写出所做的正交线性替换。

二次型与二次曲面

- 二次型与二次曲面
- 二次曲面的截痕法
- 二次曲面的截痕与正交线性替换

Hermite 二次型

定义

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是一个 Hermite 矩阵，$X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$，称

$$f(X) = X^H AX$$

为一个Hermite 二次型。矩阵 A 称为 Hermite 二次型 f 的矩阵。

定理

对 $\forall X \in \mathbb{C}^n$，Hermite 二次型

$$f(X) = X^H AX \in \mathbb{R},$$

即 Hermite 二次型 f 是一个复线性空间到实数域的映射。