8.4 实对称矩阵和 Hermite 矩阵

高等代数 https://gdfzu.club

Hermite 矩阵

定义

如果复方阵 A 满足

$$A^H = \overline{A}^T = A,$$

则称 A 为Hermite 矩阵。
实 Hermite 矩阵就是实对称矩阵，即满足 $A^T = A$ 的所有实方阵 A。

例

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$，则 A 是 Hermite 矩阵。

- Hermite 矩阵的主对角元都是实数。

Hermite 矩阵的性质

定理

设 H 是 n 阶 Hermite 矩阵，则

1. H 的特征值都是实数；
2. H 属于不同特征值的特征向量在 $\mathbb{C}^n$ 中相互正交；
3. 存在酉矩阵 U，使得 $U^H HU$ 是实对角阵。

实对称矩阵的性质

推论

设 A 是 n 阶实对称矩阵，则

1. A 的特征值都是实数；
2. A 属于不同特征值的特征向量在 $\mathbb{R}^n$ 中相互正交；
3. 存在正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 是实对角阵。

化实对称阵 A 为对角阵的方法

1. 求 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda)$ 所有根 (必在 $\mathbb{R}$ 中);
2. 对每个不同特征值 λ_i，解线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$，得特征子空间的一个基，施行 Schmidt 正交化，得特征子空间的一个标准正交基;
3. 将不同特征子空间的标准正交基凑成 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$，令
$$Q = (\gamma_1, \dots, \gamma_n),$$
则 Q 为正交矩阵且
$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ$$
为对角阵，对角元分别对应于 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 的全部特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$。

例子

例

求正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角矩阵，其中

$$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}。$$

例

设 A 是 3 阶实对称矩阵，A 的特征值为 $2,1,1$。已知属于特征值 2 的特征向量 $X_1=(1,1,0)^T$，求矩阵 A。

例子

例

设三阶实对称矩阵 A 的各行元素之和为 3，向量 $\alpha_1 = (-1,2,-1)^T, \alpha_2 = (0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $AX = 0$ 的两个解。

1. 求 A 的特征值和特征向量；
2. 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 B，使得
$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = B;$$
3. 求 A 和 $\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6$。

谱分解

- A 的谱$\operatorname{spec}(A)$：A 的所有特征值构成的多重集。

定理

设 A 是一个 n 阶 Hermite 矩阵，$\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ 是 A 的所有不同特征值。则存在投影矩阵 $P_1, \ldots, P_t$，使得

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_t P_t,$$

其中 $P_1, \ldots, P_t$ 满足

1. $P_1 + \cdots + P_t = E_n$；
2. $P_j P_k = 0$，$\forall j \neq k$；
3. P_j 是到 λ_j 的特征子空间 V_{λ_j} 的正交投影矩阵。

伴随算子

- 内积空间上的线性变换也常常被称为线性算子

定义

设 ϕ 是内积空间 V 上的线性算子。若存在 V 上的线性算子 ψ，使得对 $\forall\alpha, \beta \in V$，

$$(\phi(\alpha), \beta) = (\alpha, \psi(\beta))$$

均成立，则称 ψ 是线性算子 ϕ 的伴随算子。

定理

有限维内积空间上线性算子的伴随算子存在且唯一。

伴随算子的表示矩阵

定理

设 ϕ 是 n 维内积空间 V 上的线性算子。选定 V 的一组标准正交基 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$，记 ϕ 在 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 下的表示矩阵为 A，则 ϕ^* 在 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 下的表示矩阵为 A^H。

特别地，若 V 是欧式空间（实内积空间），则 ϕ^* 在 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 下的表示矩阵为 A^T。

自伴算子

定义

若一个线性算子 ϕ 的伴随算子就是 ϕ 本身，即

$$\phi = \phi^*,$$

则称 ϕ 为自伴算子。

- 有限维内积空间上的自伴算子与 Hermite 矩阵 “一一对应”。

正规算子/正规矩阵

定义

设 A 是一个复方阵。若

$$AA^H = A^H A,$$

则称 A 是正规矩阵。

定理

A 是正规矩阵的充要条件是：存在酉矩阵 U，使得

$$U^{-1}AU$$

是对角矩阵。