8.3 酉矩阵、正交矩阵与标准型

高等代数 https://gdfzu.club

酉相似

定义

设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$。若存在酉矩阵 U 使得

$$B = U^{-1}AU = U^{H}AU,$$

则称 A 与 B酉相似。

- 酉相似是特殊的相似，若 A 与 B 酉相似，则 A 与 B 必定相似；反之则未必。

Schur 上三角化

定理

任意复方阵都酉相似于上三角矩阵。

酉相似标准型

定理

设 A 是 n 阶酉矩阵，则存在 n 阶酉矩阵 U，使得

$$U^{-1}AU = U^{H}AU$$

为对角矩阵，且主对角元都是模为 1 的复数。

推论

酉矩阵属于不同特征值的特征子空间两两正交。

正交相似

定义

设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$。若存在正交矩阵 Q 使得

$$B = Q^{-1}AQ = Q^TAQ,$$

则称 A 与 B正交相似。

正交相似上三角化

推论

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$。若 A 的所有特征值都是实数，则 A 正交相似于实上三角阵。

二阶正交矩阵

- 正交矩阵只可能是下面两种形式之一：

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Q_1 的特征值是 $\cos\theta \pm i\sin\theta$，$Q_2$ 的特征值是 ± 1。

复特征值的特征向量

引理

设 A 为正交阵，$\lambda = a+bi(b \neq 0)$ 为 A 的一个复特征值，$X = \alpha+i\beta$ 为对应的一个特征向量，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，则 $\alpha \perp \beta$，且 $|\alpha| = |\beta|$。

- 因 $|\lambda| = 1$，故可设 $a = \cos\theta, b = -\sin\theta$。$a^2 + b^2 = 1$，
  $A\alpha = a\alpha - b\beta = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$，$A\beta = b\alpha + a\beta = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$

$$A(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

正交矩阵标准形

定理

设 A 是 n 阶正交矩阵，则存在 n 阶正交矩阵 Q，使

$$\begin{aligned} & Q^{-1}AQ = Q^T AQ \\ = \quad & \operatorname{diag}\left(E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\theta_\ell & -\sin\theta_\ell \\ \sin\theta_\ell & \cos\theta_\ell \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

其中 $r + s + 2\ell = n$。

正交变换标准形

定理

设 φ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换，则存在一个标准正交基，使得 φ 在此基下的矩阵是

$$\operatorname{diag}\left(E_r, -E_s, \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\theta_\ell & -\sin\theta_\ell \\ \sin\theta_\ell & \cos\theta_\ell \end{pmatrix}\right).$$

旋转矩阵/Givens 矩阵

定义

设 Q 是一个 n 阶正交矩阵。若 Q 正交相似于分块对角矩阵

$$\operatorname{diag}\left(E_{n-2}, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right),$$

则称 Q 是一个初等旋转矩阵，也称为Givens 矩阵/变换。

- 特例：$\theta = \pi$

反射矩阵/Householder 矩阵

定义

设 Q 是一个 n 阶正交矩阵。若 Q 正交相似于分块对角矩阵

$$\operatorname{diag}\left(E_{n-2}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right),$$

则称 Q 是一个初等反射矩阵，也称为Householder 矩阵/变换。

镜面反射

定理

一个正交矩阵 Q 是反射矩阵的充分必要条件为存在一个单位向量 η，使得

$$Q = E_n - 2\eta\eta^T.$$

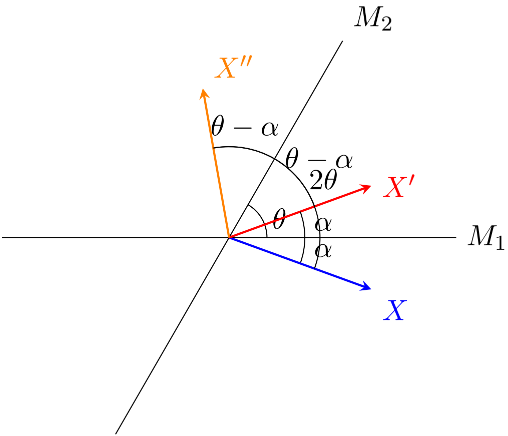
镜面反射的几何特征

- $Q = E_n - 2\eta\eta^T$， $\|\eta\| = 1$
- $W = \langle\eta\rangle^\perp$， $\dim W = n-1$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$，

$$\alpha - Q\alpha = 2\eta\eta^T\alpha = 2(\alpha,\eta)\cdot\eta \perp W,$$

$$\frac{\alpha + Q\alpha}{2} = \alpha - (\alpha,\eta)\cdot\eta = \mathrm{Proj}_W(\alpha) \in W$$

两次镜面反射等效旋转 2θ



两次镜面反射等效旋转的代数解释

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$