8.2 标准正交基与内积空间同构

高等代数 https://gdfzu.club

定义与举例

定义

内积空间中的一组两两正交向量构成的基称为正交基。若正交基的每个向量都是单位向量，则称为标准正交基。

例

在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中，

- 向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是一个标准正交基。
- 向量组 $\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \cdots, n\varepsilon_n$ 是一个正交基，但不是标准正交基。
- 向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_1+\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n$ 是一个基，但不是正交基。

一般空间的标准正交基举例

例

定义 $C[-\pi,\pi]$ 空间中的内积为

$$(f(x),g(x))=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $C[-\pi,\pi]$ 是在区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续函数全体所构成的线性空间。证明：

$$\frac{\sqrt{2}}{2},\sin(x),\cos(x),\ldots,\sin(nx),\cos(nx),\ldots$$

是 $C[-\pi,\pi]$ 中的标准正交向量组。

标准正交基的好处

- 在标准正交基 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 下，向量的坐标可用内积表示：设 $\alpha = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$，则 $a_i = (\alpha, \xi_i)$，即

$$\alpha = (\alpha, \xi_1)\,\xi_1 + \cdots + (\alpha, \xi_n)\,\xi_n.$$

- 标准正交基下，内积有特别简单的表达式：若 $\alpha = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n, \beta = b_1\xi_1 + \cdots + b_n\xi_n$，则

$$(\alpha, \beta) = a_1\bar{b}_1 + \cdots + a_n\bar{b}_n = \sum_{j=1}^{n} (\alpha, \xi_j)\,\overline{(\beta, \xi_j)}.$$

- 标准正交基下向量的长度、夹角等都可以用标准内积的公式进行计算。如

$$\|\alpha\| = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}.$$

Fourier 级数展开的系数公式

例

设 $f(x)$ 是一个以 2π 为整周期的连续周期函数，则 $f(x)$ 的 Fourier 展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\sin(nx)+b_n\cos(nx)\right),$$

其中 $f(x)$ 满足 Fourier 级数收敛的 Dirichlet 条件（请参考《数学分析》教材），且

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\ldots; \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x,\ n=1,2,3\ldots. \end{aligned}$$

内积空间同构

定义

设 U 和 V 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的内积空间，$(-,-)_U$ 和 $(-,-)_V$ 是对应的内积函数。若存在映射 $\phi : U \to V$ 满足：

1. ϕ 是 U 到 V 的线性空间同构；
2. 对任意 $\alpha, \beta \in U$，有

$$(\alpha, \beta)_U = (\phi(\alpha), \phi(\beta))_V$$

则称 U 和 V 是同构内积空间，ϕ 称为内积空间同构映射。

内积空间同构

定理

设 V 是一个一般的数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维内积空间，$(-,-)_V$ 是 V 上的内积函数。用 $(-,-)_{\mathbb{F}^n}$ 表示 $\mathbb{F}^n$ 上的标准内积函数。取 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 是 V 的标准正交基，

$$\phi : V \to \mathbb{F}^n,\ \alpha \mapsto X_\alpha$$

是标准正交基 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 对应的自然同构映射。则对 $\forall \alpha,\beta \in V$，

$$(\alpha,\beta)_V = (\phi(\alpha),\phi(\beta))_{\mathbb{F}^n} = X_\beta^H X_\alpha.$$

即 n 维内积空间 V 与标准内积空间 $\mathbb{F}^n$ 同构。

Gram-Schmidt 正交化过程

定理 Gram-Schmidt 正交化

对于一般内积空间 V 中的一个线性无关向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$，必存在标准正交向量组 $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$，使得对于任意的 $r(1 \leq r \leq s)$，总有

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_r \rangle = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_r \rangle。$$

Gram-Schmidt 正交化的过程

1. 先把线性无关的向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 化成正交向量组 $\beta_1,\dots,\beta_s$，令

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1,\\
\beta_2 &= \alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,\\
\beta_3 &= \alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2,\\
&\vdots\\
\beta_s &= \alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1};
\end{aligned}$$

2. 再单位化，令

$$\gamma_i=\frac{1}{\|\beta_i\|}\beta_i,\ i=1,\dots,s,$$

则得标准正交向量组 $\gamma_1,\dots,\gamma_s$ 满足

$$\langle\alpha_1,\dots,\alpha_r\rangle=\langle\gamma_1,\dots,\gamma_r\rangle, r=1,\dots,s。$$

标准正交基的存在性

有限维内积空间 V 的一个基 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 经 Gram-Schmidt 正交化可得 V 的一个标准正交基 $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$。

推论

有限维内积空间必有标准正交基。

注

由 $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_i\rangle=\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_i\rangle,(i=1,\ldots,n)$ 可知，若

$$(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)T,$$

则过渡矩阵 $T=(t_{ij})$ 是上三角矩阵（即 $t_{ij}=0,\ i>j$）。

标准正交基的存在性

推论

有限维内积空间 V 的任意标准正交向量组都可扩为 V 的标准正交基。

例子

例

在 $\mathbb{R}[x]_2$ 中定义内积为

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

求 $\mathbb{R}[x]_2$ 的一个标准正交基。

例子

例 Bessel 不等式

设 $\xi_1, \ldots, \xi_m$ 是 n 维内积空间 V 的正交向量组，Y 是 V 的任一向量，则

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|(Y, \xi_k)|^2}{\|\xi_k\|^2} \leq \|Y\|^2$$

且等号成立的充分必要条件是

$$Y \in \langle \xi_1, \ldots, \xi_m \rangle。$$

命题

设 U 和 V 都是数域 $\mathbb{F}$ 上的内积空间，维数分别为 m 和 n，$\phi: V \to U$ 是一个线性映射。分别取 U 和 V 的标准正交基 $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ 和 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$，记 $\phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\eta_1, \ldots, \eta_m)A_{m\times n}$. 对 $\forall \alpha, \beta \in V$，记它们在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标分别为 X 和 Y，则

$$(\phi(\alpha), \phi(\beta))_U = (AX, AY)_{\mathbb{F}^m}.$$

1. 当 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 时，
$$(\phi(\alpha), \phi(\beta))_U = Y^T A^T AX;$$
2. 当 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 时，
$$(\phi(\alpha), \phi(\beta))_U = Y^H A^H AX.$$

正交变换和酉变换

定义

设 V 是 n 维酉（欧氏）空间，ϕ 是 V 的线性变换。如果 ϕ 保持内积，即对任意 $\alpha, \beta \in V$，总成立

$$(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = (\alpha, \beta),$$

则称 ϕ 是酉变换（正交变换）。

正交变换和酉变换的矩阵

定理

设 ϕ 是内积空间 V 上的酉变换，$(\xi_1,\dots,\xi_n)$ 是 V 的标准正交基，ϕ 在 $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ 下的表示矩阵为 A，即

$$\phi(\xi_1,\dots,\xi_n)=(\xi_1,\dots,\xi_n)A.$$

则

$$A^HA=AA^H=E_n.$$

特别地，若 ϕ 是正交变换，则

$$A^TA=AA^T=E_n.$$

正交矩阵与酉矩阵

定义

1. 设 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$。若
$$U^H U = UU^H = E_n,$$
则称 U 是一个酉矩阵（unitary matrix）。
2. 设 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$。若
$$Q^T Q = QQ^T = E_n,$$
则称 Q 是一个正交矩阵（orthogonal matrix）。

举例

例

1. 单位矩阵是正交矩阵；
2. 互换矩阵是正交矩阵；
3. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵；
4. 实对角矩阵是正交矩阵的充分必要条件是对角元为 ± 1。

酉矩阵与标准正交基

定理

设 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 与 $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ 是同一个内积空间的两个基，记

$$(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)U,$$

则下述三个命题中任意两个成立都可以推出另一个成立：

1. $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 是标准正交基；
2. $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ 是标准正交基；
3. U 是酉矩阵。

正交/酉变换的性质

命题

设 ϕ 是 n 维酉（欧氏）空间 V 的线性变换，则下列条件等价：

1. ϕ 是酉（正交）变换；
2. ϕ 将 V 的标准正交基变成标准正交基；
3. ϕ 在 V 的标准正交基下矩阵是酉（正交）矩阵；
4. ϕ 是酉（欧氏）空间 V 上的同构映射。

正交变换与保长变换

命题

设 ϕ 是 n 维酉（欧氏）空间 V 的线性变换，则下列条件等价：

1. ϕ 是酉（正交）变换；
2. ϕ 保持长度不变，即对任意的 $\alpha \in V$，有 $\|\phi(\alpha)\| = \|\alpha\|$。

例 保长但不保内积

设 $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，$(z_1, \dots, z_n)^T \mapsto (|z_1|, \dots, |z_n|)^T$。则 ϕ 保持长度，但 ϕ 不是线性变换，也不保内积。

正交矩阵的性质

定理

1. 若 Q 为正交矩阵，则
   1. $\det Q = \pm 1$；
   2. Q 可逆且 $Q^{-1} = Q^T$；
   3. Q^{-1} 也是正交矩阵；
   4. Q^* 也是正交矩阵；
2. 正交矩阵的乘积是正交矩阵；
3. n 阶实方阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是 $Q^{-1} = Q^T$。

例

上（下）三角矩阵是正交矩阵的充分必要条件是它是对角矩阵且对角元素为 ± 1。

酉矩阵的性质

定理

1. 若 Q 为酉矩阵，则
   1. $|\det Q| = 1$；
   2. Q 可逆且 $Q^{-1} = \overline{Q}^T$；
   3. Q^{-1} 也是酉矩阵；
   4. Q^* 也是酉矩阵；
2. 酉矩阵的乘积是酉矩阵；
3. n 阶复方阵 Q 是酉矩阵的充分必要条件是

$$Q^{-1} = \overline{Q}^T。$$

QR-分解

定理

设 A 是 n 阶实（复）可逆矩阵，则必存在正交（酉）矩阵 Q 及对角元均为正实数的上三角阵 R，使得 $A = QR$，称为 A 的 QR-分解。

QR-分解

例

设 $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 9\\ 4 & 7 & 11\end{pmatrix}$，求正交阵 Q 和对角元均大于 0 的上三角阵 R，使得

$$A=QR。$$

解：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中

$$\alpha_1=(3,0,4)^T,\alpha_2=(-1,0,7)^T,\alpha_3=(2,9,11)^T.$$

因 A 可逆，所以 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基。

先将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交化，得

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 = (3, 0, 4)^T, \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \alpha_2 - \beta_1 = (-4, 0, 3)^T \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 = \alpha_3 - 2\beta_1 - \beta_2 = (0, 9, 0)^T,
\end{aligned}$$

再将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化，得

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{5}\beta_1 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)^T \\
\gamma_2 &= \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{5}\beta_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)^T \\
\gamma_3 &= \frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3 = \frac{1}{9}\beta_3 = (0, 1, 0)^T
\end{aligned}$$

则 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个标准正交基，且

$$\begin{cases}
\alpha_1 = \beta_1 = 5\gamma_1, \\
\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = 5\gamma_1 + 5\gamma_2, \\
\alpha_3 = 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 10\gamma_1 + 5\gamma_2 + 9\gamma_3.
\end{cases}$$

令

$$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix}5 & 5 & 10\\ 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix},$$

则 Q 是正交矩阵，R 是对角元均大于 0 的上三角矩阵，且 $A=QR$。