

8.2 标准正交基与内积空间同构

高等代数 <https://gdfzu.club>

定义与举例

定义

内积空间中的一组两两正交向量构成的基称为**正交基**。若正交基的每个向量都是单位向量，则称为**标准正交基**。

例

在欧氏空间 \mathbb{R}^n 中，

- 向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是一个标准正交基。
- 向量组 $\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \dots, n\varepsilon_n$ 是一个正交基，但不是标准正交基。
- 向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$ 是一个基，但不是正交基。

一般空间的标准正交基举例

例

定义 $C[-\pi, \pi]$ 空间中的内积为

$$(f(x), g(x)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

其中 $C[-\pi, \pi]$ 是在区间 $[-\pi, \pi]$ 上连续函数全体所构成的线性空间。证明：

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(nx), \cos(nx), \dots$$

是 $C[-\pi, \pi]$ 中的标准正交向量组。

标准正交基的好处

- 在标准正交基 (ξ_1, \dots, ξ_n) 下, 向量的坐标可用内积表示: 设 $\alpha = a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n$, 则 $a_i = (\alpha, \xi_i)$, 即

$$\alpha = (\alpha, \xi_1)\xi_1 + \dots + (\alpha, \xi_n)\xi_n.$$

- 标准正交基下, 内积有特别简单的表达式: 若 $\alpha = a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n, \beta = b_1\xi_1 + \dots + b_n\xi_n$, 则

$$(\alpha, \beta) = a_1\bar{b}_1 + \dots + a_n\bar{b}_n = \sum_{j=1}^n (\alpha, \xi_j) \overline{(\beta, \xi_j)}.$$

- 标准正交基下向量的长度、夹角等都可以用标准内积的公式进行计算。如

$$\|\alpha\| = \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}.$$

Fourier 级数展开的系数公式

例

设 $f(x)$ 是一个以 2π 为整周期的连续周期函数, 则 $f(x)$ 的 Fourier 展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)),$$

其中 $f(x)$ 满足 Fourier 级数收敛的 Dirichlet 条件 (请参考《数学分析》教材), 且

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

内积空间同构

定义

设 U 和 V 都是数域 \mathbb{F} 上的内积空间, $(-, -)_U$ 和 $(-, -)_V$ 是对应的内积函数。若存在映射 $\phi: U \rightarrow V$ 满足:

- ① ϕ 是 U 到 V 的线性空间同构;
- ② 对任意 $\alpha, \beta \in U$, 有

$$(\alpha, \beta)_U = (\phi(\alpha), \phi(\beta))_V$$

则称 U 和 V 是**同构内积空间**, ϕ 称为**内积空间同构映射**。

内积空间同构

定理

设 V 是一个一般的数域 \mathbb{F} 上 n 维内积空间, $(-, -)_V$ 是 V 上的内积函数。用 $(-, -)_{\mathbb{F}^n}$ 表示 \mathbb{F}^n 上的标准内积函数。取 (ξ_1, \dots, ξ_n) 是 V 的标准正交基,

$$\phi: V \rightarrow \mathbb{F}^n, \alpha \mapsto X_\alpha$$

是标准正交基 (ξ_1, \dots, ξ_n) 对应的自然同构映射。则对 $\forall \alpha, \beta \in V$,

$$(\alpha, \beta)_V = (\phi(\alpha), \phi(\beta))_{\mathbb{F}^n} = X_\beta^H X_\alpha.$$

即 n 维内积空间 V 与标准内积空间 \mathbb{F}^n 同构。

Gram-Schmidt 正交化过程

定理 Gram-Schmidt 正交化

对于一般内积空间 V 中的一个线性无关向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, 必存在标准正交向量组 $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, 使得对于任意的 $r (1 \leq r \leq s)$, 总有

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r \rangle.$$

Gram-Schmidt 正交化的过程

- ① 先把线性无关的向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 化成正交向量组 β_1, \dots, β_s , 令

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2,$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_s, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})} \beta_{s-1};$$

- ② 再单位化, 令

$$\gamma_i = \frac{1}{\|\beta_i\|} \beta_i, \quad i = 1, \dots, s,$$

则得标准正交向量组 $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ 满足

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r \rangle, \quad r = 1, \dots, s.$$

标准正交基的存在性

有限维内积空间 V 的一个基 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 经 Gram-Schmidt 正交化可得 V 的一个标准正交基 $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ 。

推论

有限维内积空间必有标准正交基。

注

由 $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_i \rangle = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_i \rangle, (i = 1, \dots, n)$ 可知, 若

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)T,$$

则过渡矩阵 $T = (t_{ij})$ 是上三角矩阵 (即 $t_{ij} = 0, i > j$)。

标准正交基的存在性

推论

有限维内积空间 V 的任意标准正交向量组都可扩为 V 的标准正交基。

例子

例

在 $\mathbb{R}[x]_2$ 中定义内积为

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx,$$

求 $\mathbb{R}[x]_2$ 的一个标准正交基。

例子

例 Bessel 不等式

设 ξ_1, \dots, ξ_m 是 n 维内积空间 V 的正交向量组, Y 是 V 的任一向量, 则

$$\sum_{k=1}^m \frac{|(Y, \xi_k)|^2}{\|\xi_k\|^2} \leq \|Y\|^2$$

且等号成立的充分必要条件是

$$Y \in \langle \xi_1, \dots, \xi_m \rangle.$$

命题

设 U 和 V 都是数域 \mathbb{F} 上的内积空间, 维数分别为 m 和 n , $\phi: V \rightarrow U$ 是一个线性映射。分别取 U 和 V 的标准正交基 (η_1, \dots, η_m) 和 (ξ_1, \dots, ξ_n) , 记 $\phi(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \dots, \eta_m)A_{m \times n}$. 对 $\forall \alpha, \beta \in V$, 记它们在基 (ξ_1, \dots, ξ_n) 下的坐标分别为 X 和 Y , 则

$$(\phi(\alpha), \phi(\beta))_U = (AX, AY)_{\mathbb{F}^m}.$$

① 当 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 时,

$$(\phi(\alpha), \phi(\beta))_U = Y^T A^T AX;$$

② 当 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 时,

$$(\phi(\alpha), \phi(\beta))_U = Y^H A^H AX.$$

正交变换和酉变换

定义

设 V 是 n 维酉（欧氏）空间， ϕ 是 V 的线性变换。如果 ϕ 保持内积，即对任意 $\alpha, \beta \in V$ ，总成立

$$(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = (\alpha, \beta),$$

则称 ϕ 是酉变换（正交变换）。

正交变换和酉变换的矩阵

定理

设 ϕ 是内积空间 V 上的酉变换, (ξ_1, \dots, ξ_n) 是 V 的标准正交基, ϕ 在 (ξ_1, \dots, ξ_n) 下的表示矩阵为 A , 即

$$\phi(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)A.$$

则

$$A^H A = A A^H = E_n.$$

特别地, 若 ϕ 是正交变换, 则

$$A^T A = A A^T = E_n.$$

正交矩阵与酉矩阵

定义

- ① 设 $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 。若

$$U^H U = U U^H = E_n,$$

则称 U 是一个酉矩阵 (unitary matrix)。

- ② 设 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。若

$$Q^T Q = Q Q^T = E_n,$$

则称 Q 是一个正交矩阵 (orthogonal matrix)。

举例

例

- ① 单位矩阵是正交矩阵；
- ② 互换矩阵是正交矩阵；
- ③ $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵；
- ④ 实对角矩阵是正交矩阵的充分必要条件是对角元为 ± 1 。

酉矩阵与标准正交基

定理

设 (ξ_1, \dots, ξ_n) 与 (η_1, \dots, η_n) 是同一个内积空间的两个基, 记

$$(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)U,$$

则下述三个命题中任意两个成立都可以推出另一个成立:

- ① (ξ_1, \dots, ξ_n) 是标准正交基;
- ② (η_1, \dots, η_n) 是标准正交基;
- ③ U 是酉矩阵。

正交/酉变换的性质

命题

设 ϕ 是 n 维酉（欧氏）空间 V 的线性变换，则下列条件等价：

- ① ϕ 是酉（正交）变换；
- ② ϕ 将 V 的标准正交基变成标准正交基；
- ③ ϕ 在 V 的标准正交基下矩阵是酉（正交）矩阵；
- ④ ϕ 是酉（欧氏）空间 V 上的同构映射。

正交变换与保长变换

命题

设 ϕ 是 n 维酉（欧氏）空间 V 的线性变换，则下列条件等价：

- ① ϕ 是酉（正交）变换；
- ② ϕ 保持长度不变，即对任意的 $\alpha \in V$ ，有 $\|\phi(\alpha)\| = \|\alpha\|$ 。

例 保长但不保内积

设 $\phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $(z_1, \dots, z_n)^T \mapsto (|z_1|, \dots, |z_n|)^T$ 。则 ϕ 保持长度，但 ϕ 不是线性变换，也不保内积。

酉矩阵的性质

定理

设 U, V 是两个同阶酉矩阵, 则 UV 也是酉矩阵, 且 U^{-1} 也是酉矩阵。