8.1 一般内积空间与线性映射

高等代数 https://gdfzu.club

实内积空间的定义

定义

设 V 是 $\mathbb{R}$ 上线性空间，$(-,\ -) : V \times V \to \mathbb{R}$ 是 V 上的二元函数。若对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in \mathbb{R}$，都有

- 保加法：$((\alpha+\beta),\gamma) = (\alpha,\gamma) + (\beta,\gamma)$；
- 保数乘：$(c\alpha,\beta) = c\,(\alpha,\beta)$；
- 对称性：$(\alpha,\beta) = (\beta,\alpha)$；
- 正定性：$(\alpha,\alpha) \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $\alpha = 0$；

则称二元函数 $(-,-)$ 是 V 上的一个内积。定义了内积运算的实线性空间 V 称为实内积空间。有限维实内积空间称为Euclid（欧几里得）空间，简称欧氏空间。

- 标准内积：$(\alpha,\beta) = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$

对称双线性函数

命题

设 $(-, -) : V \times V \to \mathbb{R}$ 是实线性空间 V 上的内积，则对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in \mathbb{R}$，都有

$$(\alpha, \beta + c\gamma) = (\alpha, \beta) + c(\alpha, \gamma).$$

- 实内积函数也被称为对称正定双线性函数。

复内积空间的定义

定义

设 V 是 $\mathbb{C}$ 上线性空间，$(-,\ -): V \times V \to \mathbb{C}$ 是 V 上的二元函数，如果对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in V$, $c \in \mathbb{C}$，都有

- 第一变量保加法：$((\alpha+\beta), \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$；
- 第一变量保数乘：$(c\alpha, \beta) = c\,(\alpha, \beta)$；
- 共轭对称性：$(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$；
- 正定性：$(\alpha, \alpha) \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $\alpha = 0$。

则称二元函数 $(-,-)$ 是 V 上的一个(复) 内积。定义了复内积的复线性空间 V 称为 复内积空间。有限维复内积空间也称为酉空间。

标准复内积

- 定义 $\mathbb{C}^n$ 上的二元函数：$(-,-):\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$，对 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}^n$，

$$(\alpha,\beta)=\bar{\beta}^T\alpha.$$

则可以验证这个二元函数满足复内积的定义。此内积也称为$\mathbb{C}^n$ 上的标准内积。

- $A^H\triangleq\bar{A}^T=\overline{A^T}$

- 标准复内积：$(\alpha,\beta)=\bar{\beta}^T\alpha=\beta^H\alpha$

- 标准实内积是特殊的标准复内积

复内积的性质

命题

设 V 是关于内积 $(-,-)$ 的复内积空间，则对于任意 $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_k,\beta_j\in V$，$c,a_k,b_j\in\mathbb{C},(k=1,\dots m;\ j=1,\dots,n)$，总有

- $(0,\alpha)=0$；
- $(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$；
- $(\alpha,c\beta)=\overline{c}\,(\alpha,\beta)$；
- $\left(\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\alpha_k,\sum\limits_{j=1}^{n}b_j\beta_j\right)=\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_k\overline{b}_j(\alpha_k,\beta_j)$。

- 复内积关于其第二个变量是共轭线性函数

矩阵空间上的内积

取 $V = \mathbb{F}^{m\times n}$，其中 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，

- 当 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 时，定义 $(-,-) : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ 为

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B),$$

  则 $(-,-)$ 是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上的一个实内积。

- 当 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 时，定义 $(-,-) : \mathbb{C}^{m\times n} \times \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}$ 为

$$(A, B) = \mathrm{tr}(\bar{B}^T A) = \mathrm{tr}(B^H A),$$

  则 $(-,-)$ 是 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的一个复内积。

函数空间的常用内积

例

设 $f, g \in C[a,b]$，定义

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

证明 $(-,-)$ 是 $C[a,b]$ 上的实内积。

$\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 上的非标准内积

例

设 $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$，其中每一个 $a_j > 0$，定义 $\mathbb{R}^n$ 上的内积 $(-,-)$ 为

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} d_i a_i b_i = \alpha^T D\beta,$$

其中 $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)^T$，$\beta = (b_1, \ldots, b_n)^T$。则 $(-,-)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个内积。

长度

定义

设 V 是实或复内积空间，$\alpha \in V$。定义 α 的长度（或范数）为 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$，记为 $\|\alpha\|$。

- 当 $\|\alpha\| = 1$ 时，称 α 为单位向量

单位化与极分解

命题

设 V 是实或复内积空间，$\alpha \in V$，c 是任一常数（实数或复数），则

- $\|\alpha\| \geq 0$，且 $\|\alpha\| = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$；
- $\|c\alpha\| = |c| \cdot \|\alpha\|$；
- 对任意非零向量 α，$\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ 是单位向量。

- 记 $e_\alpha = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$，称 e_α 为非 0 向量 α 的方向向量。则

$$\alpha = \|\alpha\| e_\alpha.$$

Cauchy-Schwarz 不等式

定理

设 V 是实或复内积空间，对任意的 $\alpha, \beta \in V$，总有

$$|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|,$$

等号成立的充分必要条件是 α 与 β 线性相关。

Cauchy-Schwarz 不等式举例

- 代入实标准内积可得 Cauchy 不等式：对任意实数 $a_i, b_i (i = 1, \ldots, n)$

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2);$$

- 代入函数空间内积，可得 Schwarz 不等式：对任意 $f(x), g(x) \in C[a, b]$，总有

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x \int_a^b g^2(x) \mathrm{d}x.$$

内积空间的三角不等式

定理

对实或复内积空间中任意两个向量 α, β，有

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

夹角与正交

定义

在实内积空间 V 中，非零向量 α, β 的夹角 θ 由下式定义:

$$\cos\theta = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}, \ 0 \le \theta \le \pi.$$

定义

在内积空间 V 中，如果两个向量 α, β 满足

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

则称 α 与 β 正交，记为$\alpha \perp \beta$。

勾股定理

定理 勾股定理

设 V 是实或复内积空间，$\alpha, \beta \in V$。若 α, β 正交，则

$$\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2.$$