7.1 线性变换与矩阵相似

高等代数 https://gdfzu.club

目录

概念

定义

设 V 是一个数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\varphi : V \to V$ 是 V 上的一个映射。若对任意 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$，及任意 $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$

$$\varphi(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) = c_1\varphi(\alpha_1) + c_2\varphi(\alpha_2),$$

则称 φ 是 V 上的一个线性变换。

线性变换举例

例

当 $V=\mathbb{F}^n$ 时，取 A 是一个 n 阶方阵，则

$$\varphi_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n,\varphi_A(\alpha)=A\alpha,\forall\alpha\in\mathbb{F}^n$$

是一个线性变换。

线性变换举例

例

当 $V=\mathbb{F}^n$ 时，取 A 是一个 n 阶方阵，则

$$\varphi_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n,\varphi_A(\alpha)=A\alpha,\forall\alpha\in\mathbb{F}^n$$

是一个线性变换。

- 有限维空间中的线性变换都可以按方阵来理解

线性变换举例

例

当 $V=\mathbb{F}^n$ 时，取 A 是一个 n 阶方阵，则

$$\varphi_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n,\varphi_A(\alpha)=A\alpha,\forall\alpha\in\mathbb{F}^n$$

是一个线性变换。

- 有限维空间中的线性变换都可以按方阵来理解

例

设 $c\in\mathbb{F}$。φ 是将 V 任意元素 α 变为 $c\alpha$ 的映射，容易验证 φ 是 V 上的线性变换，称为数乘变换，记为 $c\mathrm{id}_V$。

线性变换举例

例

当 $V=\mathbb{F}^n$ 时，取 A 是一个 n 阶方阵，则

$$\varphi_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n,\varphi_A(\alpha)=A\alpha,\forall\alpha\in\mathbb{F}^n$$

是一个线性变换。

- 有限维空间中的线性变换都可以按方阵来理解

例

设 $c\in\mathbb{F}$。φ 是将 V 任意元素 α 变为 $c\alpha$ 的映射，容易验证 φ 是 V 上的线性变换，称为数乘变换，记为 $c\mathrm{id}_V$。

- 零变换、恒等变换

线性变换举例

例

取 $V=\mathbb{R}^2$， $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，

$$\varphi_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\varphi_A(\alpha)=A\alpha,\forall\alpha\in\mathbb{R}^2,$$

其中 θ 是一个用弧度制表示的角度。则 φ_A 的作用效果相当于对坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 沿逆时针方向绕坐标原点旋转 θ 角。

线性变换举例

例

设 V_1 和 V_2 是线性空间 V 的子空间，且 $V = V_1 \oplus V_2$。对任意 $v \in V$ 有唯一的分解 $v = v_1 + v_2$，其中 $v_1 \in V_1$，$v_2 \in V_2$，定义：

$$P : V \to V,\ P(v) = v_1.$$

容易验证 P 是 V 上的线性变换，称为这个变换为 V 到 V_1 的投影变换。

线性变换举例

例

取 $V = C^{\infty}(a, b)$，即在开区间 (a, b) 上无穷次可微函数全体构成的线性空间。对任意 $f(x) \in C^{\infty}(a, b)$，定义

$$\mathrm{D} : f(x) \mapsto f'(x),$$

则 D 是 $C^{\infty}(a, b)$ 上的线性变换。D 也被称为微分算子。

线性变换举例

例 Lie 变换

取 $V=\mathbb{F}^{n\times n}$，A 是一个给定的 n 阶方阵。对任意 $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$，定义

$$\mathrm{ad}_A(B)=AB-BA,$$

则 ad_A 是 n 阶方阵空间上的线性变换。

目录

线性变换的表示矩阵

- 线性变换由基的像决定

线性变换的表示矩阵

- 线性变换由基的像决定
- $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)A$

线性变换的表示矩阵

- 线性变换由基的像决定
- $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)A$
- A：φ 在基 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 下的表示矩阵

表示矩阵举例

例

设 $V = \mathbb{F}_n[x]$，φ 为 V 上的求导变换，求 φ 在基 $(1, x, \ldots, x^{n-1})$ 下的表示矩阵，并利用表示矩阵演示 φ 的作用效果。

例

例

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$c \in \mathbb{F}$,

$$\phi : V \to V, \alpha \mapsto c\alpha.$$

试证:

1. ϕ 在任给的基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的表示矩阵为数量矩阵 cE_n;

例

例

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，$c \in \mathbb{F}$，

$$\phi : V \to V, \alpha \mapsto c\alpha.$$

试证:

1. ϕ 在任给的基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的表示矩阵为数量矩阵 cE_n；
2. 与 $\mathcal{L}(V)$ 中所有线性变换均可交换的线性变换必为数乘变换。

例

例

设 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 和 $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ 是 V 的两个基，ϕ、ψ 是 V 的线性变换，且

$$(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)A.$$

1. 若 $\phi(\xi_i)=\xi_i\ (i=1,\ldots,r)$；$\phi(\xi_i)=0(i=r+1,\ldots,n)$，求 ϕ 在 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 下的矩阵；

例

例

设 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 和 $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ 是 V 的两个基，ϕ、ψ 是 V 的线性变换，且

$$(\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)A.$$

1. 若 $\phi(\xi_i) = \xi_i \ (i = 1, \ldots, r)$；$\phi(\xi_i) = 0(i = r + 1, \ldots, n)$，求 ϕ 在 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 下的矩阵；
2. 若 $\psi(\xi_i) = \eta_i$，$(i = 1, \ldots, n)$，求 ψ 在基 $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ 下的矩阵。

相似

- 问题：对于同一个线性变换 φ，φ 在 V 两个不同基下的表示矩阵有什么关系?

相似

- 问题：对于同一个线性变换 φ，φ 在 V 两个不同基下的表示矩阵有什么关系?

定理

设 φ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，$(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 和 $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ 是 V 的两个基，且

$$(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)P.$$

若

$$\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)A,$$
$$\varphi(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\eta_1,\ldots,\eta_n)B,$$

则

$$B=P^{-1}AP.$$

相似关系

定义

设 A、$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。若存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称A 相似于 B，记作$A \sim B$。

相似关系

定义

设 A、$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。若存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称A 相似于 B，记作$A \sim B$。

- 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似；

相似关系

定义

设 A、$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。若存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称A 相似于 B，记作$A \sim B$。

- 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似；
- 若 A 与 B 相似，则我们也可以认为 A 和 B 是同一个线性变换在不同基下的矩阵；

相似关系

定义

设 A、$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。若存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称A 相似于 B，记作$A \sim B$。

- 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似；
- 若 A 与 B 相似，则我们也可以认为 A 和 B 是同一个线性变换在不同基下的矩阵；
- 相似是特殊的相抵；

相似关系

定义

设 A、$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。若存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称A 相似于 B，记作$A \sim B$。

- 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似；
- 若 A 与 B 相似，则我们也可以认为 A 和 B 是同一个线性变换在不同基下的矩阵；
- 相似是特殊的相抵；
- 相似关系是等价关系；

相似关系

定义

设 A、$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。若存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称 A 相似于 B，记作 $A \sim B$。

- 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似；
- 若 A 与 B 相似，则我们也可以认为 A 和 B 是同一个线性变换在不同基下的矩阵；
- 相似是特殊的相抵；
- 相似关系是等价关系；
- 核心问题: 对于一个线性变换 φ，其“最简单”的表示矩阵会是什么形式的矩阵？

目录

线性变换

- V 上所有线性变换 $\mathcal{L}(V,V)$，简记为 $\mathcal{L}(V)$。

线性变换

- V 上所有线性变换 $\mathcal{L}(V,V)$，简记为 $\mathcal{L}(V)$。
- $\mathcal{L}(V)$ 按照线性映射的加法、数乘运算构成数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。

线性变换

- V 上所有线性变换 $\mathcal{L}(V,V)$，简记为 $\mathcal{L}(V)$。
- $\mathcal{L}(V)$ 按照线性映射的加法、数乘运算构成数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。
- $\mathcal{L}(V)$ 中线性变换关于合成运算封闭，即对任意 $\phi,\psi\in\mathcal{L}(V)$，均有

$$\psi\phi\in\mathcal{L}(V),$$

线性变换

- V 上所有线性变换 $\mathcal{L}(V,V)$，简记为 $\mathcal{L}(V)$。
- $\mathcal{L}(V)$ 按照线性映射的加法、数乘运算构成数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。
- $\mathcal{L}(V)$ 中线性变换关于合成运算封闭，即对任意 $\phi,\psi\in\mathcal{L}(V)$，均有

$$\psi\phi\in\mathcal{L}(V),$$

且 $\forall\phi,\psi,\sigma\in\mathcal{L}(V),c\in\mathbb{F}$，有

线性变换

- V 上所有线性变换 $\mathcal{L}(V,V)$，简记为 $\mathcal{L}(V)$。
- $\mathcal{L}(V)$ 按照线性映射的加法、数乘运算构成数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。
- $\mathcal{L}(V)$ 中线性变换关于合成运算封闭，即对任意 $\phi,\psi\in\mathcal{L}(V)$，均有

$$\psi\phi\in\mathcal{L}(V),$$

且 $\forall\phi,\psi,\sigma\in\mathcal{L}(V),c\in\mathbb{F}$，有

1. 合成结合律: $\sigma(\psi\phi)=(\sigma\psi)\phi$;

线性变换

- V 上所有线性变换 $\mathcal{L}(V,V)$，简记为 $\mathcal{L}(V)$。
- $\mathcal{L}(V)$ 按照线性映射的加法、数乘运算构成数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。
- $\mathcal{L}(V)$ 中线性变换关于合成运算封闭，即对任意 $\phi,\psi\in\mathcal{L}(V)$，均有
$$\psi\phi\in\mathcal{L}(V),$$
且 $\forall\phi,\psi,\sigma\in\mathcal{L}(V),c\in\mathbb{F}$，有
  1. 合成结合律: $\sigma(\psi\phi)=(\sigma\psi)\phi$;
  2. 合成与加法协调:$(\sigma+\psi)\phi=\sigma\phi+\psi\phi$;

线性变换

- V 上所有线性变换 $\mathcal{L}(V,V)$，简记为 $\mathcal{L}(V)$。
- $\mathcal{L}(V)$ 按照线性映射的加法、数乘运算构成数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。
- $\mathcal{L}(V)$ 中线性变换关于合成运算封闭，即对任意 $\phi,\psi\in\mathcal{L}(V)$，均有

$$\psi\phi\in\mathcal{L}(V),$$

且 $\forall\phi,\psi,\sigma\in\mathcal{L}(V),c\in\mathbb{F}$，有

1. 合成结合律: $\sigma(\psi\phi)=(\sigma\psi)\phi$;
2. 合成与加法协调:$(\sigma+\psi)\phi=\sigma\phi+\psi\phi$;
3. 合成与数乘协调:$(c\psi)\phi=c(\psi\phi)=\psi(c\phi)$。

代数

定义

设 V 是 $\mathbb{F}$ 的线性空间。如果在 V 上定义乘法 "$\circ$" 满足

1. 乘法结合律: $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$;

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的代数。

代数

定义

设 V 是 $\mathbb{F}$ 的线性空间。如果在 V 上定义乘法 "$\circ$" 满足

1. 乘法结合律: $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$;
2. 乘法与加法协调: $\alpha \circ (\beta + \gamma) = \alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma$, $(\alpha + \beta) \circ \gamma = \alpha \circ \gamma + \beta \circ \gamma$;

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的代数。

代数

定义

设 V 是 $\mathbb{F}$ 的线性空间。如果在 V 上定义乘法 “$\circ$” 满足

1. 乘法结合律: $\alpha\circ(\beta\circ\gamma)=(\alpha\circ\beta)\circ\gamma$;
2. 乘法与加法协调: $\alpha\circ(\beta+\gamma)=\alpha\circ\beta+\alpha\circ\gamma$, $(\alpha+\beta)\circ\gamma=\alpha\circ\gamma+\beta\circ\gamma$;
3. 乘法与数乘协调: $c(\alpha\circ\beta)=(c\alpha)\circ\beta=\alpha\circ(c\beta)$;

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的代数。

代数

定义

设 V 是 $\mathbb{F}$ 的线性空间。如果在 V 上定义乘法 "$\circ$" 满足

1. 乘法结合律: $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$;
2. 乘法与加法协调: $\alpha \circ (\beta + \gamma) = \alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma$, $(\alpha + \beta) \circ \gamma = \alpha \circ \gamma + \beta \circ \gamma$;
3. 乘法与数乘协调: $c(\alpha \circ \beta) = (c\alpha) \circ \beta = \alpha \circ (c\beta)$;

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的代数。若还满足

则称 V 是带单位元 e 的 $\mathbb{F}$ 上代数。

代数

定义

设 V 是 $\mathbb{F}$ 的线性空间。如果在 V 上定义乘法 "$\circ$" 满足

1. 乘法结合律: $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$;
2. 乘法与加法协调: $\alpha \circ (\beta + \gamma) = \alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma$, $(\alpha + \beta) \circ \gamma = \alpha \circ \gamma + \beta \circ \gamma$;
3. 乘法与数乘协调: $c(\alpha \circ \beta) = (c\alpha) \circ \beta = \alpha \circ (c\beta)$;

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的代数。若还满足

4. 存在单位元: 存在 $e \in V$ 使得 $e \circ \alpha = \alpha \circ e = \alpha$;

则称 V 是带单位元 e 的 $\mathbb{F}$ 上代数。

代数

定义

设 V 是 $\mathbb{F}$ 的线性空间。如果在 V 上定义乘法 “$\circ$” 满足

1. 乘法结合律: $\alpha\circ(\beta\circ\gamma)=(\alpha\circ\beta)\circ\gamma$;
2. 乘法与加法协调: $\alpha\circ(\beta+\gamma)=\alpha\circ\beta+\alpha\circ\gamma$, $(\alpha+\beta)\circ\gamma=\alpha\circ\gamma+\beta\circ\gamma$;
3. 乘法与数乘协调: $c(\alpha\circ\beta)=(c\alpha)\circ\beta=\alpha\circ(c\beta)$;

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的代数。若还满足

4. 存在单位元: 存在 $e\in V$ 使得 $e\circ\alpha=\alpha\circ e=\alpha$;

则称 V 是带单位元 e 的 $\mathbb{F}$ 上代数。
若满足1–3，还满足

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的交换代数。

代数

定义

设 V 是 $\mathbb{F}$ 的线性空间。如果在 V 上定义乘法 “$\circ$” 满足

1. 乘法结合律: $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$;
2. 乘法与加法协调: $\alpha \circ (\beta + \gamma) = \alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma$, $(\alpha + \beta) \circ \gamma = \alpha \circ \gamma + \beta \circ \gamma$;
3. 乘法与数乘协调: $c(\alpha \circ \beta) = (c\alpha) \circ \beta = \alpha \circ (c\beta)$;

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的代数。若还满足

4. 存在单位元: 存在 $e \in V$ 使得 $e \circ \alpha = \alpha \circ e = \alpha$;

则称 V 是带单位元 e 的 $\mathbb{F}$ 上代数。
若满足1–3，还满足

5. 乘法交换律: $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$,

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的交换代数。

代数

定义

设 V 是 $\mathbb{F}$ 的线性空间。如果在 V 上定义乘法 “$\circ$” 满足

1. 乘法结合律: $\alpha\circ(\beta\circ\gamma)=(\alpha\circ\beta)\circ\gamma$;
2. 乘法与加法协调: $\alpha\circ(\beta+\gamma)=\alpha\circ\beta+\alpha\circ\gamma$, $(\alpha+\beta)\circ\gamma=\alpha\circ\gamma+\beta\circ\gamma$;
3. 乘法与数乘协调: $c(\alpha\circ\beta)=(c\alpha)\circ\beta=\alpha\circ(c\beta)$;

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的代数。若还满足

4. 存在单位元: 存在 $e\in V$ 使得 $e\circ\alpha=\alpha\circ e=\alpha$;

则称 V 是带单位元 e 的 $\mathbb{F}$ 上代数。
若满足1–3，还满足

5. 乘法交换律: $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$,

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的交换代数。若不满足 5 的代数称为非交换代数。

例

例

$\mathbb{F}^{n\times n}$ 对于矩阵的加法、数乘和乘法构成 $\mathbb{F}$ 上带单位元的非交换代数，单位元是单位阵。

例

例

$\mathbb{F}^{n\times n}$ 对于矩阵的加法、数乘和乘法构成 $\mathbb{F}$ 上带单位元的非交换代数，单位元是单位阵。

思考

第 6 章例题和作业中哪些线性空间适当定义乘法后构成代数?

代数 $\mathcal{L}(V)$

- $\mathcal{L}(V)$ 按照线性变换加法、数乘运算构成 $\mathbb{F}$ 上线性空间。

代数 $\mathcal{L}(V)$

- $\mathcal{L}(V)$ 按照线性变换加法、数乘运算构成 $\mathbb{F}$ 上线性空间。
- 线性变换的乘积：$\mathcal{L}(V)$ 中线性变换乘积定义为它们的合成即：$\psi\phi : V \to V, \alpha \mapsto \psi(\phi(\alpha))$；

代数 $\mathcal{L}(V)$

- $\mathcal{L}(V)$ 按照线性变换加法、数乘运算构成 $\mathbb{F}$ 上线性空间。
- 线性变换的乘积：$\mathcal{L}(V)$ 中线性变换乘积定义为它们的合成即：$\psi\phi : V \to V, \alpha \mapsto \psi(\phi(\alpha))$；
- $\mathcal{L}(V)$ 按照上面定义的加法、数乘和乘法运算构成 $\mathbb{F}$ 上的代数。

线性变换的幂

- 线性变换的幂：$\phi^n = \underbrace{\phi \cdot \phi \cdots \phi}_{n}$，即 n 个 ϕ 的乘积。

线性变换的幂

- 线性变换的幂：$\phi^n = \underbrace{\phi \cdot \phi \cdots \phi}_{n}$，即 n 个 ϕ 的乘积。

1. $\phi^n \phi^m = \phi^{n+m}$；

线性变换的幂

- 线性变换的幂：$\phi^n = \underbrace{\phi \cdot \phi \cdots \phi}_{n}$，即 n 个 ϕ 的乘积。

1. $\phi^n \phi^m = \phi^{n+m}$；
2. $(\phi^n)^m = \phi^{nm}$；特别的，约定 $\phi^0 = \mathrm{id}_V$；

线性变换的幂

- 线性变换的幂：$\phi^n = \underbrace{\phi \cdot \phi \cdots \phi}_{n}$，即 n 个 ϕ 的乘积。

1. $\phi^n \phi^m = \phi^{n+m}$；
2. $(\phi^n)^m = \phi^{nm}$；特别的，约定 $\phi^0 = \mathrm{id}_V$；
3. 若 ϕ 可逆，定义 $\phi^{-n} = (\phi^{-1})^n$，则 $\phi^{-n} = (\phi^n)^{-1}$。

线性变换的幂

- 线性变换的幂：$\phi^n = \underbrace{\phi \cdot \phi \cdots \phi}_{n}$，即 n 个 ϕ 的乘积。

1. $\phi^n \phi^m = \phi^{n+m}$；
2. $(\phi^n)^m = \phi^{nm}$；特别的，约定 $\phi^0 = \mathrm{id}_V$；
3. 若 ϕ 可逆，定义 $\phi^{-n} = (\phi^{-1})^n$，则 $\phi^{-n} = (\phi^n)^{-1}$。
4. 若 ϕ、ψ 可逆，$0 \neq c \in \mathbb{F}$，则
$$(\phi\psi)^{-1} = \psi^{-1}\phi^{-1}; \quad (c\phi)^{-1} = c^{-1}\phi^{-1}.$$

代数同构

定义

设 V，U 是数域 $\mathbb{F}$ 上的两个代数，若存在线性空间同构映射 $\Theta: V \to U$，且满足

$$\Theta(\alpha \circ \beta) = \Theta(\alpha) \circ \Theta(\beta)$$

则称 Θ 是 $\mathbb{F}$ 上的代数同构，称 V 与 U 代数同构。

- 注：若 V、U 代数同构，则 V，U 必线性同构，从而

$$\dim V = \dim U.$$

$\mathcal{L}(V)$ 与 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 代数同构

定理

设 V 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间，$\xi_1,\dots,\xi_n$ 是 V 的一个基，令

$$\Theta:\mathcal{L}(V)\to\mathbb{F}^{n\times n},\phi\mapsto A,$$

其中

$$\phi(\xi_1,\dots,\xi_n)=(\xi_1,\dots,\xi_n)A,$$

则 Θ 是代数同构。A 称为 ϕ 在基 $\xi_1,\dots,\xi_n$ 下的矩阵。

代数同构

推论

设 V 是 $\mathbb{F}$ 上是 n 维线性空间，则

$$\dim \mathcal{L}(V) = n^2.$$

代数同构

推论

设 V 是 $\mathbb{F}$ 上是 n 维线性空间，则

$$\dim \mathcal{L}(V) = n^2.$$

推论

定理中的 Θ 满足

代数同构

推论

设 V 是 $\mathbb{F}$ 上是 n 维线性空间，则

$$\dim \mathcal{L}(V) = n^2.$$

推论

定理中的 Θ 满足

1. $\Theta(\mathrm{id}_V) = E_n$;

代数同构

推论

设 V 是 $\mathbb{F}$ 上是 n 维线性空间，则

$$\dim \mathcal{L}(V) = n^2.$$

推论

定理中的 Θ 满足

1. $\Theta(\mathrm{id}_V) = E_n$;
2. ϕ 是 V 的自同构 $\Leftrightarrow$ $\Theta(\phi)$ 是可逆矩阵，这时有

$$\Theta(\phi^{-1}) = \Theta(\phi)^{-1}.$$

线性变换

推论

设 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 是 V 的一个基，

$$\phi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)A,$$

若 $\alpha=(\xi_1,\ldots,\xi_n)X$，则

$$\phi(\alpha)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)AX.$$

线性变换

推论

设 $\xi_1,\dots,\xi_n$ 是 V 的一个基，

$$\phi(\xi_1,\dots,\xi_n)=(\xi_1,\dots,\xi_n)A,$$

若 $\alpha=(\xi_1,\dots,\xi_n)X$，则

$$\phi(\alpha)=(\xi_1,\dots,\xi_n)AX.$$

推论

设 $\phi\in\mathcal{L}(V)$，则

$$\dim \mathrm{Im}\phi+\dim \mathrm{Ker}\phi=\dim V.$$

线性变换的等价命题

推论

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则下列命题等价：

1. ϕ 是可逆映射；

线性变换的等价命题

推论

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则下列命题等价：

1. ϕ 是可逆映射；
2. ϕ 是同构映射；

线性变换的等价命题

推论

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则下列命题等价：

1. ϕ 是可逆映射；
2. ϕ 是同构映射；
3. ϕ 是单射；

线性变换的等价命题

推论

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则下列命题等价：

1. ϕ 是可逆映射；
2. ϕ 是同构映射；
3. ϕ 是单射；
4. ϕ 是满射；

线性变换的等价命题

推论

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则下列命题等价：

1. ϕ 是可逆映射；
2. ϕ 是同构映射；
3. ϕ 是单射；
4. ϕ 是满射；
5. ϕ 在任意基下的矩阵是可逆阵。