7.10 Frobenius 标准型和广义 Jordan 标准型

高等代数 https://gdfzu.club

目录

关于 $f(\lambda)$ 的 Frobenius 块

定义

设 $f(\lambda)=\lambda^r+a_{r-1}\lambda^{r-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\in\mathbb{F}[\lambda]$ 且 $r\geq 1$，称矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{r-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$$

为关于 $f(\lambda)$ 的Frobenius 块（或关于 $f(\lambda)$ 的友阵），记为 $F(f(\lambda))$。

Frobenius 块的行列式因子、不变因子

引理

关于 $f(\lambda)$ 的 Frobenius 块 $F(f(\lambda))$ 的行列式因子为

$$\underbrace{1,\ldots,1}_{r-1},f(\lambda).$$

不变因子也是

$$\underbrace{1,\ldots,1}_{r-1},f(\lambda).$$

Frobenius 块的特征多项式、极小多项式

定理

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{r-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$$

的特征多项式和极小多项式都是

$$f(\lambda) = \lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

即

$$\chi_{F(f(\lambda))}(\lambda) = m_{F(f(\lambda))}(\lambda) = f(\lambda).$$

Frobenius 标准形

定理

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的不变因子为

$$1, \dots, 1, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_k(\lambda),$$

其中 $\deg d_i(\lambda) = m_i > 0$，则 A 相似于下列分块对角阵

$$F = \begin{pmatrix} F(d_1(\lambda)) & & & \\ & F(d_2(\lambda)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & F(d_k(\lambda)) \end{pmatrix}.$$

称 F 为 A 的Frobenius 标准形或有理标准形。

例子

例

设方阵 A 的不变因子组为

$$1,\ldots,1,\lambda+1,(\lambda+1)^2,(\lambda+1)^3,$$

求 A 的 Frobenius 标准形。

例子

例

设方阵 A 的不变因子组为

$$1, \dots, 1, \lambda+1, (\lambda+1)^2, (\lambda+1)^3,$$

求 A 的 Frobenius 标准形。

例

求下列矩阵的 Frobenius 标准形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

例子

例

求下列矩阵的 Frobenius 标准形：

$$\begin{pmatrix} F((\lambda-1)^2) & 0 \\ 0 & F((\lambda+1)^2) \end{pmatrix}.$$

例子

例

求下列矩阵的 Frobenius 标准形：

$$\begin{pmatrix} F((\lambda-1)^2) & 0 \\ 0 & F((\lambda+1)^2) \end{pmatrix}.$$

例

写出 n 阶方阵 A 的 Frobenius 标准形是对角矩阵的充要条件。

再议极小多项式

定理

设数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶矩阵 A 的不变因子为

$$1, \ldots, 1, d_1(\lambda), \ldots, d_k(\lambda),$$

则 A 的极小多项式为

$$m_A(\lambda) = d_k(\lambda).$$

目录

- 设 $A(\lambda)$ 是 $m\times n$ 阶 $\lambda-$ 矩阵，$r(A(\lambda))=r$。将 $A(\lambda)$ 的不变因子 $g_1(\lambda),g_2(\lambda),\ldots,g_r(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}$ 上分解为首一的不可约多项式之积

$$
\begin{aligned}
g_1(\lambda) &= p_1^{e_{11}}(\lambda)p_2^{e_{12}}(\lambda)\ldots p_t^{e_{1t}}(\lambda),\\
g_2(\lambda) &= p_1^{e_{21}}(\lambda)p_2^{e_{22}}(\lambda)\ldots p_t^{e_{2t}}(\lambda),\\
&\cdots\cdots\\
g_r(\lambda) &= p_1^{e_{r1}}(\lambda)p_2^{e_{r2}}(\lambda)\ldots p_t^{e_{rt}}(\lambda),
\end{aligned}
$$

  其中 $p_1(\lambda),\ldots,p_t(\lambda)$ 是首一的两两互素的不可约多项式，$e_{ij}\geq 0$。

- 设 $A(\lambda)$ 是 $m \times n$ 阶 $\lambda-$ 矩阵，$r(A(\lambda)) = r$。将 $A(\lambda)$ 的不变因子 $g_1(\lambda), g_2(\lambda), \ldots, g_r(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}$ 上分解为首一的不可约多项式之积

$$\begin{gathered} g_1(\lambda) = p_1^{e_{11}}(\lambda) p_2^{e_{12}}(\lambda) \ldots p_t^{e_{1t}}(\lambda), \\ g_2(\lambda) = p_1^{e_{21}}(\lambda) p_2^{e_{22}}(\lambda) \ldots p_t^{e_{2t}}(\lambda), \\ \ldots\ldots \\ g_r(\lambda) = p_1^{e_{r1}}(\lambda) p_2^{e_{r2}}(\lambda) \ldots p_t^{e_{rt}}(\lambda), \end{gathered}$$

其中 $p_1(\lambda), \ldots, p_t(\lambda)$ 是首一的两两互素的不可约多项式，$e_{ij} \geq 0$。

定义

- 上面分解式中满足 $e_{ij} > 0$ 的 $p_j^{e_{ij}}(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的一个（广义）初等因子，

- 设 $A(\lambda)$ 是 $m \times n$ 阶 $\lambda-$ 矩阵，$r(A(\lambda)) = r$。将 $A(\lambda)$ 的不变因子 $g_1(\lambda), g_2(\lambda), \ldots, g_r(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}$ 上分解为首一的不可约多项式之积

$$\begin{gathered} g_1(\lambda) = p_1^{e_{11}}(\lambda)p_2^{e_{12}}(\lambda)\ldots p_t^{e_{1t}}(\lambda), \\ g_2(\lambda) = p_1^{e_{21}}(\lambda)p_2^{e_{22}}(\lambda)\ldots p_t^{e_{2t}}(\lambda), \\ \cdots\cdots \\ g_r(\lambda) = p_1^{e_{r1}}(\lambda)p_2^{e_{r2}}(\lambda)\ldots p_t^{e_{rt}}(\lambda), \end{gathered}$$

  其中 $p_1(\lambda), \ldots, p_t(\lambda)$ 是首一的两两互素的不可约多项式，$e_{ij} \geq 0$。

定义

- 上面分解式中满足 $e_{ij} > 0$ 的 $p_j^{e_{ij}}(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的一个（广义）初等因子，$A(\lambda)$ 的全体初等因子（相同的必须按出现的次数计算）称为 $A(\lambda)$ 的（广义）初等因子组。

- 设 $A(\lambda)$ 是 $m\times n$ 阶 $\lambda-$ 矩阵，$r(A(\lambda))=r$。将 $A(\lambda)$ 的不变因子 $g_1(\lambda),g_2(\lambda),\ldots,g_r(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}$ 上分解为首一的不可约多项式之积

$$\begin{aligned}
g_1(\lambda)&=p_1^{e_{11}}(\lambda)p_2^{e_{12}}(\lambda)\ldots p_t^{e_{1t}}(\lambda),\\
g_2(\lambda)&=p_1^{e_{21}}(\lambda)p_2^{e_{22}}(\lambda)\ldots p_t^{e_{2t}}(\lambda),\\
&\cdots\cdots\\
g_r(\lambda)&=p_1^{e_{r1}}(\lambda)p_2^{e_{r2}}(\lambda)\ldots p_t^{e_{rt}}(\lambda),
\end{aligned}$$

其中 $p_1(\lambda),\ldots,p_t(\lambda)$ 是首一的两两互素的不可约多项式，$e_{ij}\geq 0$。

定义

- 上面分解式中满足 $e_{ij}>0$ 的 $p_j^{e_{ij}}(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的一个（广义）初等因子，$A(\lambda)$ 的全体初等因子（相同的必须按出现的次数计算）称为 $A(\lambda)$ 的（广义）初等因子组。
- n 阶数字矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的初等因子称为 A 的（广义）初等因子；

- 设 $A(\lambda)$ 是 $m\times n$ 阶 $\lambda-$ 矩阵，$r(A(\lambda))=r$。将 $A(\lambda)$ 的不变因子 $g_1(\lambda),g_2(\lambda),\ldots,g_r(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}$ 上分解为首一的不可约多项式之积

$$\begin{aligned} g_1(\lambda) &= p_1^{e_{11}}(\lambda)p_2^{e_{12}}(\lambda)\ldots p_t^{e_{1t}}(\lambda),\\ g_2(\lambda) &= p_1^{e_{21}}(\lambda)p_2^{e_{22}}(\lambda)\ldots p_t^{e_{2t}}(\lambda),\\ &\cdots\cdots\\ g_r(\lambda) &= p_1^{e_{r1}}(\lambda)p_2^{e_{r2}}(\lambda)\ldots p_t^{e_{rt}}(\lambda),\end{aligned}$$

其中 $p_1(\lambda),\ldots,p_t(\lambda)$ 是首一的两两互素的不可约多项式，$e_{ij}\geq 0$。

定义

- 上面分解式中满足 $e_{ij}>0$ 的 $p_j^{e_{ij}}(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的一个（广义）初等因子，$A(\lambda)$ 的全体初等因子（相同的必须按出现的次数计算）称为 $A(\lambda)$ 的（广义）初等因子组。
- n 阶数字矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的初等因子称为 A 的（广义）初等因子；A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的初等因子组称为 A 的（广义）初等因子组。

例子

例

设有理数域上的矩阵 A 的不变因子为:

$$1, \dots, 1, (\lambda-1)(\lambda^2+1), (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)(\lambda^2-2),$$

试分别写出 A 在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上的（广义）初等因子组。

例子

例

设有理数域上的矩阵 A 的不变因子为:

$$1, \ldots, 1, (\lambda-1)(\lambda^2+1), (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)(\lambda^2-2),$$

试分别写出 A 在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上的（广义）初等因子组。

例

求关于 $p^e(\lambda)$ 的 Frobenius 块 $F(p^e(\lambda))$ 的初等因子组，其中 $p(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的首一不可约多项式。

初等因子与不变因子间的关系

- 设 $r(A(\lambda)) = r$。

初等因子与不变因子间的关系

- 设 $r(A(\lambda)) = r$。将 $A(\lambda)$ 的非常数不变因子 $d_1(\lambda), \ldots, d_k(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}$ 上分解为首一的不可约多项式之积

$$\begin{gathered}
d_1(\lambda) = p_1^{e_{11}}(\lambda) p_2^{e_{12}}(\lambda) \ldots p_t^{e_{1t}}(\lambda), \\
d_2(\lambda) = p_1^{e_{21}}(\lambda) p_2^{e_{22}}(\lambda) \ldots p_t^{e_{2t}}(\lambda), \\
\cdots\cdots \\
d_k(\lambda) = p_1^{e_{k1}}(\lambda) p_2^{e_{k2}}(\lambda) \ldots p_t^{e_{kt}}(\lambda),
\end{gathered}$$

其中 $p_1(\lambda), \ldots, p_t(\lambda)$ 是首一的两两互素的不可约多项式，$e_{ij} \geq 0$。

初等因子与不变因子间的关系

- 设 $r(A(\lambda)) = r$。将 $A(\lambda)$ 的非常数不变因子 $d_1(\lambda), \ldots, d_k(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}$ 上分解为首一的不可约多项式之积

$$
\begin{gathered}
d_1(\lambda) = p_1^{e_{11}}(\lambda) p_2^{e_{12}}(\lambda) \ldots p_t^{e_{1t}}(\lambda), \\
d_2(\lambda) = p_1^{e_{21}}(\lambda) p_2^{e_{22}}(\lambda) \ldots p_t^{e_{2t}}(\lambda), \\
\cdots\cdots \\
d_k(\lambda) = p_1^{e_{k1}}(\lambda) p_2^{e_{k2}}(\lambda) \ldots p_t^{e_{kt}}(\lambda),
\end{gathered}
$$

  其中 $p_1(\lambda), \ldots, p_t(\lambda)$ 是首一的两两互素的不可约多项式，$e_{ij} \geq 0$。
- 其中对应于 $e_{ij} \geq 1$ 的那些方幂：

$$
p_j^{e_{ij}}(\lambda)\ (e_{ij} \geq 1)
$$

  就是 $A(\lambda)$ 的全部 (广义) 初等因子。

初等因子与不变因子间的关系

- 注意到不变因子 $d_1(\lambda), \ldots, d_k(\lambda)$ 满足

$$d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda),\ i = 1, \ldots, k-1.$$

从而，

$$p_j^{e_{ij}}(\lambda) | p_j^{e_{i+1,j}}(\lambda),\ i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, t.$$

因此有，$0 \leq e_{1j} \leq e_{2j} \leq \cdots \leq e_{rj},\ j = 1, \ldots, t$。

初等因子与不变因子间的关系

- 注意到不变因子 $d_1(\lambda),\ldots,d_k(\lambda)$ 满足
$$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda),\ i=1,\ldots,k-1.$$
从而，
$$p_j^{e_{ij}}(\lambda)|p_j^{e_{i+1,j}}(\lambda),\ i=1,\ldots,k,\ j=1,\ldots,t.$$
因此有，$0\leq e_{1j}\leq e_{2j}\leq\cdots\leq e_{rj},\ j=1,\ldots,t$。

即同一个不可约因式的方幂作成的初等因子中，方次最高的必出现在最后一个不变因子 $d_k(\lambda)$ 的分解式中，

初等因子与不变因子间的关系

- 注意到不变因子 $d_1(\lambda), \ldots, d_k(\lambda)$ 满足

$$d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda),\ i = 1, \ldots, k-1.$$

从而,

$$p_j^{e_{ij}}(\lambda) | p_j^{e_{i+1,j}}(\lambda),\ i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, t.$$

因此有,$0 \leq e_{1j} \leq e_{2j} \leq \cdots \leq e_{rj},\ j = 1, \ldots, t$。

即同一个不可约因式的方幂作成的初等因子中,方次最高的必出现在最后一个不变因子 $d_k(\lambda)$ 的分解式中,次高的必出现在倒数第二个不变因子 $d_{k-1}(\lambda)$ 中,依此类推。

初等因子与不变因子间的关系

- 设 $r(A(\lambda)) = r$ 且 $A(\lambda)$ 的全部初等因子为已知。

初等因子与不变因子间的关系

- 设 $r(A(\lambda)) = r$ 且 $A(\lambda)$ 的全部初等因子为已知。在全部初等因子中，将同一个不可约因式

$$p_j(\lambda),\ j = 1, \ldots, t$$

的方幂的那些初等因子按降幂排列，

初等因子与不变因子间的关系

- 设 $r(A(\lambda)) = r$ 且 $A(\lambda)$ 的全部初等因子为已知。在全部初等因子中，将同一个不可约因式

$$p_j(\lambda),\ j = 1, \ldots, t$$

的方幂的那些初等因子按降幂排列，而且当这种初等因子的个数不足 r 个时，则在后面补上适当个数的 1，使其凑成 r 个，

初等因子与不变因子间的关系

- 设 $r(A(\lambda)) = r$ 且 $A(\lambda)$ 的全部初等因子为已知。在全部初等因子中，将同一个不可约因式

$$p_j(\lambda),\ j = 1, \ldots, t$$

的方幂的那些初等因子按降幂排列，而且当这种初等因子的个数不足 r 个时，则在后面补上适当个数的 1，使其凑成 r 个，设所得排列为

$$p_j^{e_{rj}}(\lambda), p_j^{e_{r-1,j}}(\lambda), \ldots, p_j^{e_{1j}}(\lambda), j = 1, \ldots, t.$$

初等因子与不变因子间的关系

- 设 $r(A(\lambda)) = r$ 且 $A(\lambda)$ 的全部初等因子为已知。在全部初等因子中，将同一个不可约因式

$$p_j(\lambda),\ j = 1, \dots, t$$

的方幂的那些初等因子按降幂排列，而且当这种初等因子的个数不足 r 个时，则在后面补上适当个数的 1，使其凑成 r 个，设所得排列为

$$p_j^{e_{rj}}(\lambda), p_j^{e_{r-1,j}}(\lambda), \dots, p_j^{e_{1j}}(\lambda), j = 1, \dots, t.$$

令

$$g_i(\lambda) = p_1^{e_{i1}}(\lambda) p_2^{e_{i2}}(\lambda) \dots p_r^{e_{ir}}(\lambda), i = 1, \dots, r,$$

初等因子与不变因子间的关系

- 设 $r(A(\lambda)) = r$ 且 $A(\lambda)$ 的全部初等因子为已知。在全部初等因子中，将同一个不可约因式

$$p_j(\lambda),\ j = 1, \ldots, t$$

的方幂的那些初等因子按降幂排列，而且当这种初等因子的个数不足 r 个时，则在后面补上适当个数的 1，使其凑成 r 个，设所得排列为

$$p_j^{e_{rj}}(\lambda), p_j^{e_{r-1,j}}(\lambda), \ldots, p_j^{e_{1j}}(\lambda), j = 1, \ldots, t.$$

令

$$g_i(\lambda) = p_1^{e_{i1}}(\lambda) p_2^{e_{i2}}(\lambda) \ldots p_r^{e_{ir}}(\lambda), i = 1, \ldots, r,$$

则 $g_1(\lambda), \ldots, g_r(\lambda)$ 就是 $A(\lambda)$ 的不变因子。

初等因子与不变因子间的关系

定理

λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子由其初等因子组和秩 $r(A(\lambda))$ 唯一确定。

初等因子与不变因子间的关系

定理

λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子由其初等因子组和秩 $r(A(\lambda))$ 唯一确定。

推论

数字矩阵 A 的不变因子由其 (广义) 初等因子组唯一确定。

初等因子与不变因子间的关系

定理

λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子由其初等因子组和秩 $r(A(\lambda))$ 唯一确定。

推论

数字矩阵 A 的不变因子由其 (广义) 初等因子组唯一确定。

推论

数字矩阵 A 相似于 B 的充分必要条件是 A, B 的 (广义) 初等因子组相同。

例子

例

设 $\mathbb{Q}$ 上数字矩阵 A 在 $\mathbb{C}$ 上的初等因子组为

$$(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,\lambda+1,\lambda+1,(\lambda-i)^2,(\lambda+i)^2.$$

问 A 是几阶矩阵？求 A 在 $\mathbb{Q}$ 上的不变因子。

初等因子的求法

引理

若 $(f_i(\lambda), g_j(\lambda)) = 1$，$(i, j = 1, 2)$，则

$$(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda))(g_1(\lambda), g_2(\lambda)).$$

引理

若 $(f_i(\lambda), g_j(\lambda)) = 1$，$(i, j = 1, 2)$，则

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

初等因子的求法

定理

设 $A(\lambda) \simeq \mathrm{diag}\{h_1(\lambda), \ldots, h_r(\lambda), 0, \ldots, 0\}$ 且

$$h_i(\lambda) = p_1^{e_{i1}}(\lambda) p_2^{e_{i2}}(\lambda) \ldots p_t^{e_{it}}(\lambda),$$

其中 $p_j(\lambda)$ 是两两互素的首一不可约多项式且 $e_{ij} \geq 0$。则

$$\left\{ p_j^{e_{ij}}(\lambda) | e_{ij} > 0, i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, t \right\}$$

是 $A(\lambda)$ 的 (广义) 初等因子组。

目录

广义 Jordan 块的不变因子、初等因子

引理

设 $p(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 m 次首一不可约多项式，$F(p(\lambda))$ 是关于 $p(\lambda)$ 的 Frobenius 块。令 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0_{(m-1)\times(m-1)} & 0 \end{pmatrix}$ 是 m 阶方阵，则 em 阶方阵

$$J(p^e(\lambda)) = \begin{pmatrix} F(p(\lambda)) & & & \\ C & F(p(\lambda)) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & C & F(p(\lambda)) \end{pmatrix}$$

的行列式因子和不变因子都是 $1, \ldots, 1, p^e(\lambda)$，初等因子组为 $p^e(\lambda)$。

广义 Jordan 块

定义

上述引理中的矩阵 $J(p^e(\lambda))$ 称为关于 $p^e(\lambda)$ 的广义 Jordan 块。

定理

设 A 的初等因子组为

$$p_1^{e_1}(\lambda), p_2^{e_2}(\lambda), \ldots, p_m^{e_m}(\lambda),$$

则 A 相似于分块对角矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J(p_1^{e_1}(\lambda)) & & & \\ & J(p_2^{e_2}(\lambda)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(p_m^{e_m}(\lambda)) \end{pmatrix}.$$

定理

设 A 的初等因子组为

$$p_1^{e_1}(\lambda), p_2^{e_2}(\lambda), \ldots, p_m^{e_m}(\lambda),$$

则 A 相似于分块对角矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J(p_1^{e_1}(\lambda)) & & & \\ & J(p_2^{e_2}(\lambda)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(p_m^{e_m}(\lambda)) \end{pmatrix}.$$

- 称 J 为 A 的广义 Jordan 矩阵，或称为 A 的广义 Jordan 标准形。

定理

设 A 的初等因子组为

$$p_1^{e_1}(\lambda), p_2^{e_2}(\lambda), \dots, p_m^{e_m}(\lambda),$$

则 A 相似于分块对角矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J(p_1^{e_1}(\lambda)) & & & \\ & J(p_2^{e_2}(\lambda)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(p_m^{e_m}(\lambda)) \end{pmatrix}.$$

- 称 J 为 A 的广义 Jordan 矩阵，或称为 A 的广义 Jordan 标准形。
- 在不考虑广义 Jordan 块的排列次序的前提下，A 的广义 Jordan 标准形唯一确定。

例子

例

设有理数域上的 10 阶方阵 A 的不变因子为

$$1, \ldots, 1, (\lambda-2)^2(\lambda^2+2), (\lambda-2)^2(\lambda^2+2)^2,$$

求 A 在有理数域上的广义 Jordan 标准形。

例子

例

在实数域上下列矩阵是否为广义 Jordan 标准形？为什么？其广义 Jordan 标准形是什么？

(1) $\begin{pmatrix} F(\lambda^2-1) & 0 \\ C & F(\lambda^2-1) \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} F(\lambda+2) & 0 \\ C & F(\lambda+1) \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} F(\lambda^2+1) & 0 \\ 0 & F(\lambda^2+1) \end{pmatrix}$； (4) $\begin{pmatrix} F(\lambda^2-1) & 0 \\ 0 & F(\lambda^2+1) \end{pmatrix}$.

例子

例

在实数域上下列矩阵是否为广义 Jordan 标准形？为什么？其广义 Jordan 标准形是什么？

(1) $\begin{pmatrix} F(\lambda^2-1) & 0 \\ C & F(\lambda^2-1) \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} F(\lambda+2) & 0 \\ C & F(\lambda+1) \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} F(\lambda^2+1) & 0 \\ 0 & F(\lambda^2+1) \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} F(\lambda^2-1) & 0 \\ 0 & F(\lambda^2+1) \end{pmatrix}$.

例

设 $p(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}$ 上不可约多项式，问是否存在 2×2 阶分块对角矩阵 D，使得在数域 $\mathbb{F}$ 上，D 相似于矩阵 $J(p^e(\lambda))$?