7.9 Jordan 标准型与空间分解

高等代数 https://gdfzu.club

- 设 ϕ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，其初等因子组为:

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},(\lambda-\lambda_2)^{e_2},\ldots,(\lambda-\lambda_m)^{e_m},$$

则存在 V 的一个基 $\xi_1,\ldots,\xi_n$，使得

$$\phi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\begin{pmatrix} J(\lambda_1,e_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_m,e_m) \end{pmatrix}$$

其中 $e_1+\cdots+e_m=n$。

循环子空间

- 令
$$V(\lambda_1, e_1) = \langle \xi_1, \ldots, \xi_{e_1} \rangle,$$
则
$$\begin{aligned}
\phi(\xi_1) &= \lambda_1 \xi_1 + \xi_2, \\
\phi(\xi_2) &= \lambda_1 \xi_2 + \xi_3, \\
&\cdots \\
\phi(\xi_{e_1 - 1}) &= \lambda_1 \xi_{e_1 - 1} + \xi_{e_1}, \\
\phi(\xi_{e_1}) &= \lambda_1 \xi_{e_1}.
\end{aligned}$$
故 $\phi(V(\lambda_1, e_1)) \subset V(\lambda_1, e_1)$，即 $V(\lambda_1, e_1)$ 是 ϕ-子空间。

- 同理，令
$$V(\lambda_j, e_j) = \langle \xi_{t_j+1}, \ldots, \xi_{t_j+e_j} \rangle,$$
其中 $t_j = e_1 + e_2 + \cdots + e_{j-1}$，即 $V(\lambda_j, e_j)$ 对应 Jordan 块 $J(\lambda_j, e_j)$，对应初等因子 $(\lambda - \lambda_j)^{e_j}$，则 $V(\lambda_j, e_j)$ 也是 ϕ-子空间，故有 ϕ-子空间的直和分解
$$V = V(\lambda_1, e_1) \oplus V(\lambda_2, e_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k, e_k).$$

目录

循环子空间

- $$\begin{aligned}(\phi-\lambda_1\mathrm{id}_V)\xi_1 &= \xi_2,\\ (\phi-\lambda_1\mathrm{id}_V)\xi_2 &= \xi_3,\\ &\cdots\\ (\phi-\lambda_1\mathrm{id}_V)\xi_{e_1-1} &= \xi_{e_1},\\ (\phi-\lambda_1\mathrm{id}_V)\xi_{e_1} &= 0.\end{aligned}$$

定义

设 U 是线性空间 V 的 r 维子空间。若存在 $\alpha \in U$，使 $\alpha,\psi(\alpha),\psi^2(\alpha),\ldots,\psi^{r-1}(\alpha)$ 为 U 的一个基，则称 U 为线性变换 ψ 的循环子空间。此时，称 $\alpha,\psi(\alpha),\psi^2(\alpha),\ldots,\psi^{r-1}(\alpha)$ 为 U 的一个循环基。

循环子空间直和分解

定理

设 ϕ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维空间 V 的线性变换，设 ϕ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},(\lambda-\lambda_2)^{e_2},\ldots,(\lambda-\lambda_k)^{e_k}.$$

则

$$V=V(\lambda_1,e_1)\oplus V(\lambda_2,e_2)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k,e_k),$$

这里 $V(\lambda_i,e_i)$ 是 $\phi-\lambda_i\mathrm{id}_V$ 的循环子空间，因而是 ϕ-子空间；$\dim V(\lambda_i,e_i)=e_i(i=1,2,\ldots,k)$；且每个 $V(\lambda_i,e_i)$不能分解成为两个非零 ϕ-子空间的直和。

目录

根子空间直和分解

定义

设 λ_0 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维空间 V 上线性变换 ϕ 的特征值，且 λ_0 是 $m_\phi(\lambda)$ 的 s_0 重根。则

$$R(\lambda_0) = \{\alpha \in V | (\phi - \lambda_0 \mathrm{id}_V)^{s_0}(\alpha) = 0\}$$

是 V 的 ϕ-子空间，称为属于特征根 λ_0 的根子空间。

根子空间直和分解

定理

没 ϕ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ 是 ϕ 的全部不同特征值，且

$$m_\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1}(\lambda - \lambda_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{s_t},$$

则

$$V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_t),$$

其中 $R(\lambda_i)$ 是 λ_i 的根子空间；$\dim R(\lambda_i)$ 是 λ_i 的代数重数；$R(\lambda_i)$ 可表为若干个循环子空间的直和。

Jordan-Chevalley 分解定理

定理

设 ϕ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则存在唯一的一对线性变换 ψ 和 δ，使得

1. $\phi=\psi+\delta$，其中 ψ 是可对角化的线性变换，δ 是幂零线性变换，且 $\psi\delta=\delta\psi$；

Jordan-Chevalley 分解定理

定理

设 ϕ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则存在唯一的一对线性变换 ψ 和 δ，使得

1. $\phi = \psi + \delta$，其中 ψ 是可对角化的线性变换，δ 是幂零线性变换，且 $\psi\delta = \delta\psi$；
2. 存在 $g(\lambda), h(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$，使得 $\psi = g(\phi), \delta = h(\phi)$。

Jordan-Chevalley 分解定理

定理

设 ϕ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则存在唯一的一对线性变换 ψ 和 δ，使得

1. $\phi=\psi+\delta$，其中 ψ 是可对角化的线性变换，δ 是幂零线性变换，且 $\psi\delta=\delta\psi$;
2. 存在 $g(\lambda),h(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$，使得 $\psi=g(\phi),\delta=h(\phi)$。

定理 孙子定理

设 $p_1(x),\ldots,p_m(x)\in\mathbb{F}[x](m\geq 2)$ 两两互素，$g_1(x),\ldots,g_m(x)\in\mathbb{F}[x]$ 且 $\deg g_i(x)<\deg p_i(x)$，则存在唯一多项式 $g(x)$，使得对任意 $i=1,\ldots,m$，有

$$g(x)=p_i(x)q_i(x)+g_i(x).$$