7.8 初等因子组与 Jordan 标准型

高等代数 https://gdfzu.club

目录

初等因子组

- 设复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵 A 的不变因子组为:

$$(1,\ldots,1,d_1(\lambda),\ldots,d_k(\lambda)),$$

- 记

$$\begin{aligned} d_1(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{1t}}, \\ d_2(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{e_{21}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{2t}}, \\ &\vdots \\ d_k(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{e_{k1}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{kt}}, \end{aligned}$$

- $0 \le e_{1s} \le \cdots \le e_{ks},\ s=1,\ldots,t.$

初等因子组

定义

复方阵 A 所有非平凡不变因子在分解式中满足 $e_{js} > 0$ 的 $(\lambda - \lambda_s)^{e_{js}}$ 称为 A 的一个初等因子，A 的全体初等因子（相同的按出现次数计算）构成的多重集称为 A 的初等因子组。

初等因子组

定义

复方阵 A 所有非平凡不变因子在分解式中满足 $e_{js} > 0$ 的 $(\lambda - \lambda_s)^{e_{js}}$ 称为 A 的一个初等因子，A 的全体初等因子（相同的按出现次数计算）构成的多重集称为 A 的初等因子组。

例

设矩阵 A 的不变因子为：

$$1, \ldots, 1, (\lambda-1)(\lambda^2+1), (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)(\lambda^2-2),$$

试写出 A 的初等因子组。

初等因子组与不变因子组

命题

数字矩阵 A 的不变因子由其初等因子组唯一确定。

初等因子组与不变因子组

命题

数字矩阵 A 的不变因子由其初等因子组唯一确定。

例

设数字矩阵 A 的初等因子组为

$$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, \lambda+1, \lambda+1, (\lambda-i)^2, (\lambda+i)^2.$$

问 A 是几阶矩阵？求 A 的不变因子组。

初等因子组与不变因子组

定理

数字矩阵 A 相似于 B 的充分必要条件是 A, B 的初等因子组相同。

初等因子的求法

引理

若 $(f_i(\lambda), g_j(\lambda)) = 1$，$(i, j = 1, 2)$，则

$$(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda))(g_1(\lambda), g_2(\lambda)).$$

初等因子的求法

引理

若 $(f_i(\lambda), g_j(\lambda)) = 1,\ (i, j = 1, 2)$，则

$$(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda))(g_1(\lambda), g_2(\lambda)).$$

引理

若 $(f_i(\lambda), g_j(\lambda)) = 1,\ (i, j = 1, 2)$，则

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

初等因子的求法

定理

设 $\lambda E - A \simeq \mathrm{diag}(h_1(\lambda), \ldots, h_n(\lambda))$ 且

$$h_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{j1}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{e_{js}},$$

其中 $e_{jk} \geq 0$。则多重集

$$\{(\lambda - \lambda_k)^{e_{jk}} | e_{jk} > 0, j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, s\}$$

是 A 的初等因子组。

初等因子的求法

定理

设 $\lambda E - A \simeq \operatorname{diag}(h_1(\lambda), \ldots, h_n(\lambda))$ 且

$$h_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{j1}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{e_{js}},$$

其中 $e_{jk} \geq 0$。则多重集

$$\{(\lambda - \lambda_k)^{e_{jk}} | e_{jk} > 0, j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, s\}$$

是 A 的初等因子组。

推论

设 $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k)$，其中每一个 $A_j (j = 1, \ldots, k)$ 都是方阵。则 A 的初等因子组等于所有 A_j 的初等因子组的并集。

例子

例

设 $\lambda E - A \simeq \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & (\lambda-1)^2(\lambda+2) & & \\ & & & \lambda+2 & \\ & & & & \lambda-1 \end{pmatrix}$,

求 A 的初等因子组，不变因子组。

目录

Jordan 块矩阵

定义

称 k 阶方阵

$$J(\lambda_0, k) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

为特征值 λ_0 的Jordan 块。

Jordan 块矩阵

定义

称 k 阶方阵

$$J(\lambda_0, k) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

为特征值 λ_0 的Jordan 块。

引理

k 阶 Jordan 块矩阵 $J(\lambda_0, k)$ 的行列式因子与不变因子均为 $(1, \dots, 1, (\lambda - \lambda_0)^k)$，初等因子组中只有一个初等因子 $(\lambda - \lambda_0)^k$。

引理

设

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, k_1) & & & \\ & J(\lambda_2, k_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s, k_s) \end{pmatrix},$$

则 J 的初等因子组为

$$\{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}, (\lambda - \lambda_2)^{k_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_s)^{k_s}\}.$$

Jordan 标准型

定理

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，且 A 的初等因子组为

$$\{(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, (\lambda-\lambda_2)^{k_2}, \ldots, (\lambda-\lambda_s)^{k_s}\},$$

则 A 相似于分块对角矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, k_1) & & & \\ & J(\lambda_2, k_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s, k_s) \end{pmatrix},$$

称 J 为 A 的Jordan 标准型。

线性变换 Jordan 标准型矩阵

定理

设 φ 是复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换，则必存在 V 的一个基，使得 φ 在此基下的矩阵是 Jordan 标准型矩阵。

例子

例

设 A 的初等因子组为

$$(\lambda-2)^2, (\lambda-2)^2, \lambda+\sqrt{2}i, (\lambda+\sqrt{2}i)^2, \lambda-\sqrt{2}i, (\lambda+\sqrt{2}i)^2,$$

求 A 的 Jordan 标准型。

例子

例

设 A 的初等因子组为

$$(\lambda-2)^2, (\lambda-2)^2, \lambda+\sqrt{2}i, (\lambda+\sqrt{2}i)^2, \lambda-\sqrt{2}i, (\lambda+\sqrt{2}i)^2,$$

求 A 的 Jordan 标准型。

例

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准型。

目录

特征多项式、极小多项式与 **Jordan** 标准型的关系

定理

设 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵 A 的所有不同特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$，则 $\chi_A(\lambda) = D_n(\lambda) = g_1(\lambda) \cdots g_n(\lambda)$，且等于 A 的所有初等因子的乘积。记

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{n_t},$$

特征多项式、极小多项式与 Jordan 标准型的关系

定理

设 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵 A 的所有不同特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$，则 $\chi_A(\lambda) = D_n(\lambda) = g_1(\lambda) \cdots g_n(\lambda)$，且等于 A 的所有初等因子的乘积。记

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{n_t},$$

则 n_i 为所有特征值为 λ_i 的 Jordan 块阶数之和，也等于初等因子组中 $\lambda - \lambda_i$ 的次幂之和。

特征多项式、极小多项式与 Jordan 标准型的关系

定理

设 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵 A 的所有不同特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$，则 A 的极小多项式就是 A 的最后一个不变因子，即 $m_A(\lambda) = g_n(\lambda)$，且等于 A 的初等因子组中含不同的 $\lambda - \lambda_i$ 方幂中次幂最高项之积。

特征多项式、极小多项式与 Jordan 标准型的关系

定理

设 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵 A 的所有不同特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$，则 A 的极小多项式就是 A 的最后一个不变因子，即 $m_A(\lambda) = g_n(\lambda)$，且等于 A 的初等因子组中含不同的 $\lambda - \lambda_i$ 方幂中次幂最高项之积。记

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{s_t},$$

特征多项式、极小多项式与 Jordan 标准型的关系

定理

设 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵 A 的所有不同特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$，则 A 的极小多项式就是 A 的最后一个不变因子，即 $m_A(\lambda) = g_n(\lambda)$，且等于 A 的初等因子组中含不同的 $\lambda - \lambda_i$ 方幂中次幂最高项之积。记

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{s_t},$$

则 s_i 为所有特征值为 λ_i 的 Jordan 块的最大阶数，也等于初等因子组 $\lambda - \lambda_i$ 的最高次幂项的次数。

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的：

1. A 相似于对角矩阵；

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的：

1. A 相似于对角矩阵；
2. A 的初等因子全是一次的；

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的：

1. A 相似于对角矩阵；
2. A 的初等因子全是一次的；
3. A 的每个 Jordan 块全是一阶的；

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的：

1. A 相似于对角矩阵；
2. A 的初等因子全是一次的；
3. A 的每个 Jordan 块全是一阶的；
4. A 的不变因子无重根；

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的：

1. A 相似于对角矩阵；
2. A 的初等因子全是一次的；
3. A 的每个 Jordan 块全是一阶的；
4. A 的不变因子无重根；
5. A 的极小多项式无重根。

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的：

1. A 相似于对角矩阵；
2. A 的初等因子全是一次的；
3. A 的每个 Jordan 块全是一阶的；
4. A 的不变因子无重根；
5. A 的极小多项式无重根。

例

若 $A^k = E$，证明：A 在复数域上相似于对角矩阵。

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的:

1. A 相似于数量矩阵，即 $A = cE_n$;

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的：

1. A 相似于数量矩阵，即 $A = cE_n$；
2. A 的极小多项式是一次多项式；

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的：

1. A 相似于数量矩阵，即 $A = cE_n$；
2. A 的极小多项式是一次多项式；
3. A 的初等因子全是一次的，且完全相同；

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的：

1. A 相似于数量矩阵，即 $A = cE_n$；
2. A 的极小多项式是一次多项式；
3. A 的初等因子全是一次的，且完全相同；
4. A 的不变因子完全相同（或者全是一次的）。

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的：

1. A 的特征多项式等于极小多项式；

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的：

1. A 的特征多项式等于极小多项式；
2. A 的不同特征值只含一个 Jordan 块；

推论

推论

设 A 是复数域上 n 阶方阵，则下面的叙述是等价的:

1. A 的特征多项式等于极小多项式;
2. A 的不同特征值只含一个 Jordan 块;
3. A 的不同 Jordan 块对角元必互异。

矩阵的秩与 Jordan 标准型的关系

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，且 A 的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{k_s}$, 则 A 相似于分块对角矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, k_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_s, k_s) \end{pmatrix}.$$

于是，$r(A) = r\left(J(\lambda_1, k_1)\right) + \cdots + r\left(J(\lambda_s, k_s)\right)$。

矩阵的秩与 Jordan 标准型的关系

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，且 A 的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{k_s}$, 则 A 相似于分块对角矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1,k_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_s,k_s) \end{pmatrix}.$$

于是，$r(A) = r\left(J(\lambda_1,k_1)\right) + \cdots + r\left(J(\lambda_s,k_s)\right)$。而

$$r\left(J(\lambda,k)\right) = \begin{cases} k, & \text{当}\lambda \neq 0\text{时}, \\ k-1, & \text{当}\lambda = 0\text{时}。 \end{cases}$$

定理

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，则 $r(A) = r$ 当且仅当 A 的 Jordan 标准型 J 中属于特征值 0 的 Jordan 块有 $n-r$ 块。

几何重数与 Jordan 标准型的关系

定理

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$\lambda_0$ 是 A 的一个特征值，则 A 的 Jordan 标准型 J 中属于 λ_0 的 Jordan 块有 $n - r(\lambda_0 E - A)$ 块，即 A 的 Jordan 标准型 J 中属于 λ_0 的 Jordan 块的个数等于 λ_0 的几何重数。

Jordan 块矩阵的多项式

定理

设 $J=J(\lambda_0,k)$ 是一个 Jordan 块矩阵，$f(x)$ 是一个多项式。则

$$f(J)=\begin{pmatrix} f(\lambda_0) & & & & \\ \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & f(\lambda_0) & & & \\ \frac{f''(\lambda_0)}{2!} & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{f^{(k-1)}(\lambda_0)}{(k-1)!} & \cdots & \frac{f''(\lambda_0)}{2!} & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & f(\lambda_0) \end{pmatrix}.$$

目录

例子

例 按列解过渡矩阵，利用 λ-矩阵求过渡矩阵

设 $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -9 & 4 & 6 \\ -9 & 3 & -5 \end{pmatrix}$，求过渡矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$，其中 J 为 A 的 Jordan 标准型。