7.7 λ-矩阵的相抵标准型

高等代数 https://gdfzu.club

主要结论回顾

- 数字矩阵 A 可逆矩阵的充要条件是 A 是初等矩阵的乘积。

主要结论回顾

- 数字矩阵 A 可逆矩阵的充要条件是 A 是初等矩阵的乘积。
- 同阶数字矩阵 A 与 B 相抵意味着 A 经过初等变换可以变成 B。

主要结论回顾

- 数字矩阵 A 可逆矩阵的充要条件是 A 是初等矩阵的乘积。
- 同阶数字矩阵 A 与 B 相抵意味着 A 经过初等变换可以变成 B。
- 矩阵的秩是相抵不变量，可以判定两个同阶数字矩阵是否相抵。

目录

λ-矩阵的初等变换与初等矩阵

定义

对 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 实行下列变换称为行初等变换：

- 互换变换：将 $A(\lambda)$ 两行对换；

λ-矩阵的初等变换与初等矩阵

定义

对 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 实行下列变换称为行初等变换:

- 互换变换: 将 $A(\lambda)$ 两行对换;
- 倍法变换: 将 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以非零常数c;

λ-矩阵的初等变换与初等矩阵

定义

对 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 实行下列变换称为行初等变换:

- 互换变换: 将 $A(\lambda)$ 两行对换;
- 倍法变换: 将 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以非零常数c;
- 消法变换: 将 $A(\lambda)$ 的第 j 行乘以 $f(\lambda)$ 后加到第 i 行上去。

λ-矩阵的初等变换与初等矩阵

定义

对 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 实行下列变换称为行初等变换:

- 互换变换: 将 $A(\lambda)$ 两行对换;
- 倍法变换: 将 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以非零常数c;
- 消法变换: 将 $A(\lambda)$ 的第 j 行乘以 $f(\lambda)$ 后加到第 i 行上去。

相应地，有列初等变换的定义。

λ-矩阵的初等变换与初等矩阵

定义

对单位矩阵作一次 λ-矩阵实行变换所得到的矩阵称初等矩阵。

- 互换矩阵：将 E_n 的第 i 行与第 j 行互换，记为 $E(i,j)$；

λ-矩阵的初等变换与初等矩阵

定义

对单位矩阵作一次 λ-矩阵实行变换所得到的矩阵称初等矩阵。

- 互换矩阵：将 E_n 的第 i 行与第 j 行互换，记为 $E(i,j)$；
- 倍法矩阵：将 E_n 的第 i 行乘非零常数c，记为 $E(i(c))$；

λ-矩阵的初等变换与初等矩阵

定义

对单位矩阵作一次 λ-矩阵实行变换所得到的矩阵称初等矩阵。

- 互换矩阵：将 E_n 的第 i 行与第 j 行互换，记为 $E(i,j)$；
- 倍法矩阵：将 E_n 的第 i 行乘非零常数c，记为 $E(i(c))$；
- 消法矩阵：将 E_n 的第 j 行乘以 $f(\lambda)$ 加到第 i 行，记为 $E(i,j(f(\lambda)))$。

λ-矩阵的初等变换与初等矩阵

定理

设 $A(\lambda)$ 是 $m \times n$ 的 λ-矩阵，则对 $A(\lambda)$ 施行行（列）的初等变换相当于左（右）乘一个相应的初等 λ-矩阵。

可逆与初等变换

定理

若 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 是初等 λ-矩阵的乘积，则 $A(\lambda)$ 可逆。

可逆与初等变换

定理

若 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 是初等 λ-矩阵的乘积，则 $A(\lambda)$ 可逆。

推论

若 $A(\lambda)$ 经有限次 λ-矩阵初等变换可以变成 $B(\lambda)$，则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵。

可逆与初等变换

定理

若 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 是初等 λ-矩阵的乘积，则 $A(\lambda)$ 可逆。

推论

若 $A(\lambda)$ 经有限次 λ-矩阵初等变换可以变成 $B(\lambda)$，则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵。

- 上述命题的逆命题是否成立?

目录

利用初等变换化简

引理

设 $A(\lambda)$ 是一个非零的 $m \times n$ 阶 λ-矩阵，则 $A(\lambda)$ 必相抵于 $B(\lambda) = (b_{ij}(\lambda))$ ，其中

$$b_{11}(\lambda) \neq 0,\ b_{11}(\lambda)|b_{ij}(\lambda)\ (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n).$$

定理

设 $A(\lambda)$ 是 $m\times n$ 阶 λ-矩阵，则

$$A(\lambda)\simeq\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}\triangleq\Lambda_{A(\lambda)},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是首一多项式 $(i=1,\ldots,r)$，且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$， $i=1,\ldots,r-1$.

定理

设 $A(\lambda)$ 是 $m\times n$ 阶 λ-矩阵，则

$$A(\lambda)\simeq\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r(\lambda) & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}\triangleq\Lambda_{A(\lambda)},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是首一多项式 $(i=1,\ldots,r)$，且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$，$i=1,\ldots,r-1$.

- $\Lambda_{A(\lambda)}$ 称为 $A(\lambda)$ 的相抵标准形，或法式，或Smith 标准型。

定理

设 $A(\lambda)$ 是 $m \times n$ 阶 λ-矩阵，则

$$A(\lambda) \simeq \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix} \triangleq \Lambda_{A(\lambda)},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是首一多项式 $(i = 1, \ldots, r)$，且 $d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda)$，$i = 1, \ldots, r-1$.

- $\Lambda_{A(\lambda)}$ 称为 $A(\lambda)$ 的相抵标准形，或法式，或Smith 标准型。
- 注意：法式的唯一性还未验证。

可逆与初等变换

推论

1. $A(\lambda)$ 可逆的充要条件是 $A(\lambda)$ 是初等 λ-矩阵的乘积;

可逆与初等变换

推论

1. $A(\lambda)$ 可逆的充要条件是 $A(\lambda)$ 是初等 λ-矩阵的乘积；
2. $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵的充要条件为 $A(\lambda)$ 经有限次 λ-矩阵初等变换可以变成 $B(\lambda)$。

注

$A(\lambda)$ 的行列式与其法式的行列式仅差一非零常数倍。

注

$A(\lambda)$ 的行列式与其法式的行列式仅差一非零常数倍。

推论

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ，则 A 的特征矩阵 $\lambda E - A$ 必相抵于

$$\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d_1(\lambda), \ldots, d_k(\lambda)),$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}$ 上首一多项式，$\deg d_i(\lambda) \geq 1$, $(i = 1, \ldots, k)$，且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$, $(i = 1, \ldots, k-1)$。

例子

例

用初等变换化下列 λ-矩阵为标准形。

1. $A(\lambda)=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & -\lambda^2\end{pmatrix}$;

例子

例

用初等变换化下列 λ-矩阵为标准形。

1. $A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$;
2. $B(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$。

目录

问题

- λ-矩阵的法式是否有其它计算方法?

问题

- λ-矩阵的法式是否有其它计算方法?
- $\begin{pmatrix} \lambda-1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & \lambda-1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)(\lambda+1) \end{pmatrix}$ 相抵吗?

行列式因子

定义

设 $A(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}$ 上 $m \times n$ 阶 λ-矩阵，k 是小于等于 $\min\{m, n\}$ 的某个自然数。如果 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的最大公因式不等于零，则称首项系数为 1 的最大公因式为 $A(\lambda)$ 的k 阶行列式因子，

行列式因子

定义

设 $A(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}$ 上 $m \times n$ 阶 λ-矩阵，k 是小于等于 $\min\{m, n\}$ 的某个自然数。如果 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的最大公因式不等于零，则称首项系数为 1 的最大公因式为 $A(\lambda)$ 的k 阶行列式因子，记为 $D_k(\lambda)$。

行列式因子

定义

设 $A(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}$ 上 $m \times n$ 阶 λ-矩阵，k 是小于等于 $\min\{m,n\}$ 的某个自然数。如果 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的最大公因式不等于零，则称首项系数为 1 的最大公因式为 $A(\lambda)$ 的k 阶行列式因子，记为 $D_k(\lambda)$。

注

若 $r(A(\lambda)) = r$，则 $A(\lambda)$ 有 r 个行列式因子。

例子

例

求下列 λ-矩阵的行列式因子:

1. $\begin{pmatrix} \lambda-1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & \lambda-1 \end{pmatrix}$;

例子

例

求下列 λ-矩阵的行列式因子:

1. $\begin{pmatrix} \lambda-1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & \lambda-1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$;

例子

例

求下列 λ-矩阵的行列式因子：

1. $\begin{pmatrix} \lambda-1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & \lambda-1 \end{pmatrix}$；
2. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$；
3. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)(\lambda+1) \end{pmatrix}$。

例子

例

求一般 λ-矩阵法式

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

的行列式因子，其中 $d_i(\lambda)$ 为首一多项式，且

$$d_j(\lambda)|d_{j+1}(\lambda),\ (i=1,\ldots,r;\ j=1,\ldots,r-1).$$

行列式因子在相抵关系下的不变性

定理

相抵 λ-矩阵有相同的行列式因子与秩。

行列式因子在相抵关系下的不变性

定理

相抵 λ-矩阵有相同的行列式因子与秩。

推论

设 $r(A(\lambda))=r$，$D_1(\lambda),\ldots,D_r(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的行列式因子，则

$$D_i(\lambda)|D_{i+1}(\lambda),\ (i=1,\ldots,r-1).$$

行列式因子在相抵关系下的不变性

推论

λ-矩阵的法式是唯一的。

行列式因子在相抵关系下的不变性

推论

λ-矩阵的法式是唯一的。

推论

$A(\lambda) \simeq B(\lambda) \Leftrightarrow A(\lambda),\ B(\lambda)$ 有相同的行列式因子。

例子

例

利用行列式因子分别求以下 λ-矩阵的法式，并判断其是否相抵：

1. $\begin{pmatrix} \lambda-1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & \lambda-1 \end{pmatrix}$;

例子

例

利用行列式因子分别求以下 λ-矩阵的法式，并判断其是否相抵：

1. $$\begin{pmatrix} \lambda-1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & \lambda-1 \end{pmatrix};$$
2. $$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix};$$

例子

例

利用行列式因子分别求以下 λ-矩阵的法式，并判断其是否相抵：

1. $\begin{pmatrix} \lambda-1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & \lambda-1 \end{pmatrix}$；
2. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$；
3. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)(\lambda+1) \end{pmatrix}$。

目录

不变因子

定义

设秩为 r 的 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的法式为

$$\operatorname{diag}(g_1(\lambda), \ldots, g_r(\lambda), 0, \ldots, 0)$$

其中首一多项式 $g_i(\lambda)|g_{i+1}(\lambda), i = 1, \ldots, r-1$ 。称 $g_i(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的第 i 个不变因子，称

$$(g_1(\lambda), \ldots, g_r(\lambda))$$

为 $A(\lambda)$ 的不变因子组。

行列式因子与不变因子的关系

- 设 $A(\lambda)$ 的行列式因子为 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$，则 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$g_1(\lambda) = D_1(\lambda),\ g_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \cdots,\ g_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)};$$

行列式因子与不变因子的关系

- 设 $A(\lambda)$ 的行列式因子为 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$，则 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$g_1(\lambda) = D_1(\lambda),\ g_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \cdots,\ g_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)};$$

- 反之，若 $A(\lambda)$ 的不变因子为 $g_1(\lambda), g_2(\lambda), \cdots, g_r(\lambda)$，则 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$D_1(\lambda) = g_1(\lambda), D_2(\lambda) = g_1(\lambda)g_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda) = g_1(\lambda)g_2(\lambda)\cdots g_r(\lambda).$$

例子

例

求下列 λ-矩阵的不变因子:

1. $$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix},$$

例子

例

求下列 λ-矩阵的不变因子:

1. $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2+\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{pmatrix}$,
2. $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$。

λ-矩阵相抵的充要条件

定理

对 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$，下列叙述等价：

1. $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$；

λ-矩阵相抵的充要条件

定理

对 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$，下列叙述等价：

1. $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$;
2. $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的行列式因子;

λ-矩阵相抵的充要条件

定理

对 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$，下列叙述等价：

1. $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$;
2. $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的行列式因子;
3. $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的不变因子;

λ-矩阵相抵的充要条件

定理

对 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$，下列叙述等价：

1. $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$；
2. $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的行列式因子；
3. $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的不变因子；
4. $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的法式。

目录

数字矩阵的行列式因子、不变因子

定义

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，多项式矩阵 $\lambda E - A$ 称为矩阵 A 的特征矩阵。

特征矩阵 $\lambda E - A$ 的行列式因子和不变因子分别称为A 的行列式因子和不变因子。

数字矩阵的行列式因子、不变因子

定义

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，多项式矩阵 $\lambda E - A$ 称为矩阵 A 的特征矩阵。

特征矩阵 $\lambda E - A$ 的行列式因子和不变因子分别称为A 的行列式因子和不变因子。

注

1. 数字矩阵 A 的最后一个行列式因子等于 A 的特征多项式；

数字矩阵的行列式因子、不变因子

定义

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，多项式矩阵 $\lambda E - A$ 称为矩阵 A 的特征矩阵。
特征矩阵 $\lambda E - A$ 的行列式因子和不变因子分别称为A 的行列式因子和不变因子。

注

1. 数字矩阵 A 的最后一个行列式因子等于 A 的特征多项式；
2. 数字矩阵 A 所有不变因子的乘积等于 A 的特征多项式。

例子

例

求 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ 的不变因子。

矩阵相似的充要条件

推论

对于 n 阶方阵 A 和 B，下列叙述是等价的：

1. A 相似于 B；

矩阵相似的充要条件

推论

对于 n 阶方阵 A 和 B，下列叙述是等价的：

1. A 相似于 B;
2. A 和 B 有相同的行列式因子;

矩阵相似的充要条件

推论

对于 n 阶方阵 A 和 B，下列叙述是等价的:

1. A 相似于 B;
2. A 和 B 有相同的行列式因子;
3. A 和 B 有相同的不变因子。

矩阵相似的充要条件

推论

对于 n 阶方阵 A 和 B，下列叙述是等价的：

1. A 相似于 B；
2. A 和 B 有相同的行列式因子；
3. A 和 B 有相同的不变因子。

例

判断下列两个矩阵是否相似。

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

相似与数域扩大无关

推论

设 $\mathbb{F}, \mathbb{K}$ 是数域且 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$。$A,\ B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。则 A, B 在 $\mathbb{F}$ 上相似的充分必要条件是 A, B 在 $\mathbb{K}$ 上相似。