7.6 λ-矩阵相抵与矩阵相似

高等代数 https://gdfzu.club

主要结论回顾

- 任一复方阵必复相似于一个上三角阵。

主要结论回顾

- 任一复方阵必复相似于一个上三角阵。

- n 阶复方阵 A 有 n 个线性无关特征向量时，A 相似一个对角矩阵，且

$$\mathbb{F}^n = V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus \cdots \bigoplus V_{\lambda_k}.$$

主要结论回顾

- 任一复方阵必复相似于一个上三角阵。
- n 阶复方阵 A 有 n 个线性无关特征向量时，A 相似一个对角矩阵，且

$$\mathbb{F}^n = V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus \cdots \bigoplus V_{\lambda_k}.$$

- 复方阵不可对角化时

主要结论回顾

- 任一复方阵必复相似于一个上三角阵。
- n 阶复方阵 A 有 n 个线性无关特征向量时，A 相似一个对角矩阵，且
$$\mathbb{F}^n = V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus \cdots \bigoplus V_{\lambda_k}.$$
- 复方阵不可对角化时
  - 代数问题：相似的最简矩阵是什么?

主要结论回顾

- 任一复方阵必复相似于一个上三角阵。

- n 阶复方阵 A 有 n 个线性无关特征向量时，A 相似一个对角矩阵，且

$$\mathbb{F}^n = V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus \cdots \bigoplus V_{\lambda_k}.$$

- 复方阵不可对角化时
  - 代数问题：相似的最简矩阵是什么?
  - 几何问题：$\mathbb{F}^n = \bigoplus$?

目录

λ-矩阵的定义

定义

设 $\mathbb{F}$ 是一个数域，形如

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

的 $m\times n$ 矩阵，其中 $a_{ij}(\lambda)\in\mathbb{F}[\lambda]$，称为数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式矩阵或λ-矩阵。

说明

和数字矩阵一样，λ-矩阵可定义：

说明

和数字矩阵一样，λ-矩阵可定义：

- 相等、加法、数乘、乘法（数的运算换成多项式的运算）

说明

和数字矩阵一样，λ-矩阵可定义:

- 相等、加法、数乘、乘法（数的运算换成多项式的运算）
- 行列式、伴随矩阵、秩（和数字矩阵定义相同）

例子

例

1. $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda + 3 \\ 1 & \lambda^3 + 2\lambda \end{pmatrix}$;

例子

例

1. $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2-1 & \lambda+3\\ 1 & \lambda^3+2\lambda\end{pmatrix}$；
2. 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$，则 $\lambda E-A$ 为特殊的多项式矩阵，称为 A 的特征矩阵。

例子

例

1. $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2-1 & \lambda+3\\ 1 & \lambda^3+2\lambda\end{pmatrix}$；
2. 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$，则 $\lambda E-A$ 为特殊的多项式矩阵，称为 A 的特征矩阵。

上面例子中，

$$A(\lambda)=\lambda^3\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\lambda^2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&3\\1&0\end{pmatrix}.$$

多项式矩阵与矩阵多项式可相互转换化

注

设 $A(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 λ-矩阵，则 $A(\lambda)$ 可化为如下形状

$$M_l\lambda^l + M_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + M_0,$$

其中 M_i 是 $m \times n$ 数字矩阵，$i = 1, 2, \cdots, l$。

当 $M_l \neq 0$ 时，称 $A(\lambda)$ 为 l 次矩阵多项式。

多项式矩阵与矩阵多项式可相互转换化

注

设 $A(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 λ-矩阵，则 $A(\lambda)$ 可化为如下形状

$$M_l\lambda^l + M_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + M_0,$$

其中 M_i 是 $m \times n$ 数字矩阵，$i = 1, 2, \cdots, l$。

当 $M_l \neq 0$ 时，称 $A(\lambda)$ 为 l 次矩阵多项式。

注

多项式矩阵和矩阵多项式可相互转化。

可逆 λ-矩阵

定义

若 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 都是 n 阶 λ-矩阵，且 $A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E_n$，则称 $A(\lambda)$ 是可逆 λ-矩阵，$B(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的逆 λ-矩阵。

可逆 λ-矩阵

定义

若 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 都是 n 阶 λ-矩阵，且 $A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E_n$，则称 $A(\lambda)$ 是可逆 λ-矩阵，$B(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的逆 λ-矩阵。

命题

若 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的逆矩阵存在，则必唯一，记为 $A(\lambda)^{-1}$。

可逆 λ-矩阵

定义

若 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 都是 n 阶 λ-矩阵，且 $A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E_n$，则称 $A(\lambda)$ 是可逆 λ-矩阵，$B(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的逆 λ-矩阵。

命题

若 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 的逆矩阵存在，则必唯一，记为 $A(\lambda)^{-1}$。

命题

若 n 阶 λ-矩阵 $A(\lambda), B(\lambda)$ 均可逆，则 $A(\lambda)B(\lambda)$ 可逆且

$$(A(\lambda)B(\lambda))^{-1} = B(\lambda)^{-1}A(\lambda)^{-1}.$$

可逆 λ-矩阵

定理

n 阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是 $\det A(\lambda)$ 为一非零常数。

可逆 λ-矩阵

定理

n 阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是 $\det A(\lambda)$ 为一非零常数。

例

对任意 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，问

1. $\lambda E - A$ 可逆吗?
2. $r(\lambda E - A) = n$?

可逆 λ-矩阵

定理

n 阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是 $\det A(\lambda)$ 为一非零常数。

例

对任意 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，问

1. $\lambda E - A$ 可逆吗?
2. $r(\lambda E - A) = n$?

注

若 n 阶 λ-矩阵 $A(\lambda)$ 可逆，则 $r(A(\lambda)) = n$。但反之不然。

目录

矩阵相似的条件

定理

设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵，则 A 相似于 B 的充分必要条件是 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 相抵。

带余除法

引理

设 $M(\lambda)$, $N(\lambda)$ 是非零 n 阶 λ-矩阵，B 是 n 阶数字矩阵，则必存在 λ-矩阵 $Q(\lambda)$ 和 $S(\lambda)$ 以及数字矩阵 L 和 R，使得

$$M(\lambda) = (\lambda E - B)Q(\lambda) + L, \quad N(\lambda) = S(\lambda)(\lambda E - B) + R.$$

证明

充分性:

证明

充分性:

$$M(\lambda)(\lambda E - A)N(\lambda) = \lambda E - B$$

证明

充分性:

$$M(\lambda)(\lambda E - A)N(\lambda) = \lambda E - B$$

$$M(\lambda)(\lambda E - A) = (\lambda E - B)N^{-1}(\lambda)$$

证明

充分性:

$$M(\lambda)(\lambda E - A)N(\lambda) = \lambda E - B$$

$$M(\lambda)(\lambda E - A) = (\lambda E - B)N^{-1}(\lambda)$$

$$L(\lambda E - A) = (\lambda E - B)[N^{-1}(\lambda) - Q(\lambda)(\lambda E - A)]$$

证明

充分性:

$$M(\lambda)(\lambda E - A)N(\lambda) = \lambda E - B$$

$$M(\lambda)(\lambda E - A) = (\lambda E - B)N^{-1}(\lambda)$$

$$L(\lambda E - A) = (\lambda E - B)[N^{-1}(\lambda) - Q(\lambda)(\lambda E - A)]$$

$$N^{-1}(\lambda) - Q(\lambda)(\lambda E - A) \triangleq P$$

证明

充分性:

$$M(\lambda)(\lambda E - A)N(\lambda) = \lambda E - B$$

$$M(\lambda)(\lambda E - A) = (\lambda E - B)N^{-1}(\lambda)$$

$$L(\lambda E - A) = (\lambda E - B)[N^{-1}(\lambda) - Q(\lambda)(\lambda E - A)]$$

$$N^{-1}(\lambda) - Q(\lambda)(\lambda E - A) \triangleq P$$

$$PN(\lambda) + Q(\lambda)(\lambda E - A)N(\lambda) = E$$

证明

充分性:

$$M(\lambda)(\lambda E - A)N(\lambda) = \lambda E - B$$

$$M(\lambda)(\lambda E - A) = (\lambda E - B)N^{-1}(\lambda)$$

$$L(\lambda E - A) = (\lambda E - B)[N^{-1}(\lambda) - Q(\lambda)(\lambda E - A)]$$

$$N^{-1}(\lambda) - Q(\lambda)(\lambda E - A) \triangleq P$$

$$PN(\lambda) + Q(\lambda)(\lambda E - A)N(\lambda) = E$$

$$PN(\lambda) + Q(\lambda)M^{-1}(\lambda)(\lambda E - B) = E$$

证明

充分性：

$$M(\lambda)(\lambda E - A)N(\lambda) = \lambda E - B$$

$$M(\lambda)(\lambda E - A) = (\lambda E - B)N^{-1}(\lambda)$$

$$L(\lambda E - A) = (\lambda E - B)[N^{-1}(\lambda) - Q(\lambda)(\lambda E - A)]$$

$$N^{-1}(\lambda) - Q(\lambda)(\lambda E - A) \triangleq P$$

$$PN(\lambda) + Q(\lambda)(\lambda E - A)N(\lambda) = E$$

$$PN(\lambda) + Q(\lambda)M^{-1}(\lambda)(\lambda E - B) = E$$

$$[PS(\lambda) + Q(\lambda)M^{-1}(\lambda)](\lambda E - B) + PR = E$$