7.5 零化多项式

高等代数 https://gdfzu.club

目录

1. 零化多项式与 Cayley-Hamilton 定理
   - 零化多项式
   - Cayley-Hamilton 定理
2. 矩阵的极小多项式
   - 极小多项式的定义
   - 极小多项式的性质
3. 线性变换的极小多项式

零化多项式的定义

定义

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $0 \neq f(\lambda) = a_s\lambda^s + a_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{F}[\lambda]$。若成立

$$f(A) = a_sA^s + a_{s-1}A^{s-1} + \cdots + a_0E = 0,$$

则称 A适合多项式 $f(\lambda)$，或称 $f(\lambda)$ 是 A 的零化多项式。

零化多项式的定义

定义

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $0 \neq f(\lambda) = a_s\lambda^s + a_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{F}[\lambda]$。若成立

$$f(A) = a_sA^s + a_{s-1}A^{s-1} + \cdots + a_0E = 0,$$

则称 A适合多项式 $f(\lambda)$，或称 $f(\lambda)$ 是 A 的零化多项式。

例

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ 是 A 的零化多项式。

零化多项式与相似

命题

设 A 与 B 是任意两个相似方阵，$f(x)$ 是一个多项式。则 $f(A)=0$ 当且仅当 $f(B)=0$，即是否为零化多项式在相似变换下保持不变。

零化多项式的存在性——Cayley-Hamilton 定理

定理 Cayley-Hamilton 定理

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵，$\chi_A(\lambda)$ 是 A 的特征多项式，则

$$\chi_A(A) = 0.$$

零化多项式的存在性——Cayley-Hamilton 定理

定理 Cayley-Hamilton 定理

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵，$\chi_A(\lambda)$ 是 A 的特征多项式，则

$$\chi_A(A) = 0.$$

引理

若 $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$，则 $\chi_B(B) = 0$。

例子

例

设 A 是 n 阶可逆矩阵，证明：存在 $n-1$ 次多项式 $g(\lambda)$，使得 $A^{-1}=g(A)$。

例子

例

设 A 是 n 阶可逆矩阵，证明：存在 $n-1$ 次多项式 $g(\lambda)$，使得 $A^{-1}=g(A)$。

注

矩阵的零化多项式不唯一。

目录

1. 零化多项式与 Cayley-Hamilton 定理
   - 零化多项式
   - Cayley-Hamilton 定理
2. 矩阵的极小多项式
   - 极小多项式的定义
   - 极小多项式的性质
3. 线性变换的极小多项式

极小多项式的定义

定义

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，A 的次数最小且首一的零化多项式称为 A 的极小多项式。

极小多项式的定义

定义

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，A 的次数最小且首一的零化多项式称为 A 的**极小多项式**。

例

- 数量矩阵 kE；

极小多项式的定义

定义

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，A 的次数最小且首一的零化多项式称为 A 的极小多项式。

例

- 数量矩阵 kE;
- 特别地，单位矩阵 E;

极小多项式的定义

定义

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，A 的次数最小且首一的零化多项式称为 A 的极小多项式。

例

- 数量矩阵 kE;
- 特别地，单位矩阵 E;
- 零矩阵;

极小多项式的定义

定义

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，A 的次数最小且首一的零化多项式称为 A 的极小多项式。

例

- 数量矩阵 kE；
- 特别地，单位矩阵 E；
- 零矩阵；
- 若矩阵 A 的极小多项式的是一次多项式，则 A 一定是数量矩阵。

极小多项式的唯一性

定理

1. 方阵 A 的极小多项式整除 A 的所有零化多项式;

极小多项式的唯一性

定理

1. 方阵 A 的极小多项式整除 A 的所有零化多项式；
2. 方阵 A 的极小多项式必唯一，记为 $m_A(\lambda)$；

极小多项式的唯一性

定理

1. 方阵 A 的极小多项式整除 A 的所有零化多项式;
2. 方阵 A 的极小多项式必唯一，记为 $m_A(\lambda)$;
3. 相似的矩阵具有相同的极小多项式，反之不然。

极小多项式与特征多项式的关系

推论

对于 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，有 $m_A(\lambda) | \chi_A(\lambda)$。

极小多项式与特征多项式的关系

推论

对于 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，有 $m_A(\lambda) | \chi_A(\lambda)$。

引理

设 λ_0 是 A 的特征根，则 $(\lambda - \lambda_0) | m_A(\lambda)$。

极小多项式与特征多项式的关系

推论

对于 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，有 $m_A(\lambda)|\chi_A(\lambda)$。

引理

设 λ_0 是 A 的特征根，则 $(\lambda-\lambda_0)|m_A(\lambda)$。

推论

在不计重数的情况下，$m_A(\lambda)$ 与 $\chi_A(\lambda)$ 有完全相同的根。

例子

例

求 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

的极小多项式。

例子

例

设 A, B 为 n 阶矩阵，若 $(m_A(\lambda), m_B(\lambda)) = 1$，证明：$\chi_A(B)$ 是可逆矩阵，这里 $\chi_A(\lambda)$ 是 A 的特征多项式。

例子

例

设 A, B 为 n 阶矩阵，若 $(m_A(\lambda), m_B(\lambda)) = 1$，证明：$\chi_A(B)$ 是可逆矩阵，这里 $\chi_A(\lambda)$ 是 A 的特征多项式。

例

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，求 A^{2026}。

分块对角矩阵的极小多项式

定理

设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

这里 A_1, A_2 是方阵，则 $m_A(\lambda)$ 是 $m_{A_1}(\lambda)$ 和 $m_{A_2}(\lambda)$ 的最小公倍式，即

$$m_A(\lambda) = [m_{A_1}(\lambda),\ m_{A_2}(\lambda)].$$

可对角化与极小多项式

例

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{n_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2E_{n_2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_tE_{n_t}\end{pmatrix}$，其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_t$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上互异的常数。求 A 的极小多项式 $m_A(\lambda)$。

可对角化与极小多项式

例

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{n_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2E_{n_2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_tE_{n_t}\end{pmatrix}$，其中 $\lambda_1,\dots,\lambda_t$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上互异的常数。求 A 的极小多项式 $m_A(\lambda)$。

定理

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵，证明：A 可对角化的充要条件是 A 的极小多项式是数域 $\mathbb{F}$ 上两两互素一次因式的乘积。

准素分解

引理

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵，$f_1(x), \ldots, f_t(x) \in \mathbb{F}[x]$ 两两互素，$f(x) = f_1(x) \cdots f_t(x)$，则

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t,$$

其中 $V = \mathrm{Ker} f(A)$ 是 $f(A)X = 0$ 的解空间，$V_i = \mathrm{Ker} f_i(A)$ 是 $f_i(A)X = 0$ 的解空间。

目录

1 零化多项式与 Cayley-Hamilton 定理
- 零化多项式
- Cayley-Hamilton 定理

2 矩阵的极小多项式
- 极小多项式的定义
- 极小多项式的性质

3 线性变换的极小多项式

线性变换的极小多项式定义

定义

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维空间 V 的线性变换，若存在

$$0 \neq f(\lambda) = a_s\lambda^s + a_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{F}[\lambda],$$

使得

$$f(\varphi) = a_s\varphi^s + a_{s-1}\varphi^{s-1} + \cdots + a_0 id_V = 0,$$

则称 $f(\lambda)$ 是 φ 的零化多项式。

φ 的次数最低的且首项系数为 1 的零化多项式称为 φ 的极小多项式，记作 $m_\varphi(\lambda)$。

线性变换与矩阵的极小多项式间的关系

命题

设 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 是线性空间 V 的一个基，φ 在此基下的矩阵为 A，即

$$\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)A.$$

设 $f(\lambda)\in\mathbb{F}[\lambda]$，则

1. $f(\lambda)$ 是 φ 的零化多项式的充要条件是 $f(\lambda)$ 是 A 的零化多项式；

线性变换与矩阵的极小多项式间的关系

命题

设 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 是线性空间 V 的一个基，φ 在此基下的矩阵为 A，即

$$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)A.$$

设 $f(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$，则

1. $f(\lambda)$ 是 φ 的零化多项式的充要条件是 $f(\lambda)$ 是 A 的零化多项式；
2. $m_\varphi(\lambda) = m_A(\lambda)$。

线性变换零化多项式性质

命题

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维空间 V 的线性变换，$\chi_\varphi(\lambda)$ 是 φ 的特征多项式，$m_\varphi(\lambda)$ 是 φ 的极小多项式，则

1. (Cayley-Hamilton 定理) $\chi_\varphi(\varphi) = 0$。

线性变换零化多项式性质

命题

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维空间 V 的线性变换，$\chi_\varphi(\lambda)$ 是 φ 的特征多项式，$m_\varphi(\lambda)$ 是 φ 的极小多项式，则

1. (Cayley-Hamilton 定理) $\chi_\varphi(\varphi) = 0$。
2. φ 的极小多项式整除 φ 的所有零化多项式；特别地, $m_\varphi(\lambda)|\chi_\varphi(\lambda)$ 。

线性变换零化多项式性质

命题

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维空间 V 的线性变换，$\chi_\varphi(\lambda)$ 是 φ 的特征多项式，$m_\varphi(\lambda)$ 是 φ 的极小多项式，则

1. (Cayley-Hamilton 定理) $\chi_\varphi(\varphi) = 0$。
2. φ 的极小多项式整除 φ 的所有零化多项式；特别地，$m_\varphi(\lambda)|\chi_\varphi(\lambda)$ 。
3. 线性变换 φ 的极小多项式唯一。

线性变换零化多项式性质

命题

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维空间 V 的线性变换，$\chi_\varphi(\lambda)$ 是 φ 的特征多项式，$m_\varphi(\lambda)$ 是 φ 的极小多项式，则

1. (Cayley-Hamilton 定理) $\chi_\varphi(\varphi)=0$。
2. φ 的极小多项式整除 φ 的所有零化多项式；特别地，$m_\varphi(\lambda)|\chi_\varphi(\lambda)$ 。
3. 线性变换 φ 的极小多项式唯一。
4. 在不计重数的情况下，$m_\varphi(\lambda)$ 与 $\chi_\varphi(\lambda)$ 有相同的根。

线性变换零化多项式性质

命题

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维空间 V 的线性变换，$\chi_\varphi(\lambda)$ 是 φ 的特征多项式，$m_\varphi(\lambda)$ 是 φ 的极小多项式，则

1. (Cayley-Hamilton 定理) $\chi_\varphi(\varphi) = 0$。
2. φ 的极小多项式整除 φ 的所有零化多项式；特别地，$m_\varphi(\lambda)|\chi_\varphi(\lambda)$ 。
3. 线性变换 φ 的极小多项式唯一。
4. 在不计重数的情况下，$m_\varphi(\lambda)$ 与 $\chi_\varphi(\lambda)$ 有相同的根。
5. 设 $V = V_1 \bigoplus V_2$，其中 V_1, V_2 是 φ-不变子空间，则

$$m_\varphi(\lambda) = [m_{\varphi|_{V_1}}(\lambda), m_{\varphi|_{V_2}}(\lambda)].$$