7.4 可对角化

高等代数 https://gdfzu.club

目录

可对角化定义

定义

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵，如果存在 $\mathbb{F}$ 上可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，则称 A 是可对角化的。

可对角化定义

定义

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵，如果存在 $\mathbb{F}$ 上可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，则称 A 是可对角化的。

注

并非所有的矩阵都可对角化。

可对角化定义

定义

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵，如果存在 $\mathbb{F}$ 上可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，则称 A 是可对角化的。

注

并非所有的矩阵都可对角化。

例如，设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 A 不可对角化。

可对角化的充要条件 1

定理

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，则 A 可对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关特征向量。

说明

注

1. 若 A 是 $\mathbb{F}$ 上可对角化矩阵，即存在 $\mathbb{F}$ 上可逆阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

则对角元 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的特征值，P 的第 i 个列向量为矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量。

说明

注

1. 若 A 是 $\mathbb{F}$ 上可对角化矩阵，即存在 $\mathbb{F}$ 上可逆阵 P，使得
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$
则对角元 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的特征值，P 的第 i 个列向量为矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量。
2. 矩阵 A 可对角化问题与数域有关。

代数重数、几何重数

引理

设 A 是 n 阶方阵，λ_0 是 A 的特征值。设 λ_0 是 A 的特征多项式的 n_0 重根，λ_0 的特征子空间 V_{λ_0} 的维数为 s_0，则$s_0 \leq n_0$。

代数重数、几何重数

引理

设 A 是 n 阶方阵，λ_0 是 A 的特征值。设 λ_0 是 A 的特征多项式的 n_0 重根，λ_0 的特征子空间 V_{λ_0} 的维数为 s_0，则$s_0 \leq n_0$。

定义

设 λ_0 是 n 阶方阵 A 的特征值，我们称 λ_0 作为 $\chi_A(\lambda)$ 的根的重数 n_0 为 λ_0 的代数重数；称 λ_0 的特征子空间 V_{λ_0} 的维数 s_0 为 λ_0 的几何重数。

代数重数、几何重数

引理

设 A 是 n 阶方阵，λ_0 是 A 的特征值。设 λ_0 是 A 的特征多项式的 n_0 重根，λ_0 的特征子空间 V_{λ_0} 的维数为 s_0，则$s_0 \leq n_0$。

定义

设 λ_0 是 n 阶方阵 A 的特征值，我们称 λ_0 作为 $\chi_A(\lambda)$ 的根的重数 n_0 为 λ_0 的代数重数；称 λ_0 的特征子空间 V_{λ_0} 的维数 s_0 为 λ_0 的几何重数。

- 同一个特征值的几何重数$\leq$代数重数。

可对角化的充要条件 2

定理

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, 则下列命题等价:

1. A 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化;

可对角化的充要条件 2

定理

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, 则下列命题等价:

1. A 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化;
2. A 在 $\mathbb{F}$ 上有 n 个线性无关的特征向量;

可对角化的充要条件 2

定理

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, 则下列命题等价:

1. A 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化;
2. A 在 $\mathbb{F}$ 上有 n 个线性无关的特征向量;
3. A 的特征多项式的根全在 $\mathbb{F}$ 上，且每个特征值的代数重数等于几何重数。

可对角化的充要条件 2

定理

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, 则下列命题等价:

1. A 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化;
2. A 在 $\mathbb{F}$ 上有 n 个线性无关的特征向量;
3. A 的特征多项式的根全在 $\mathbb{F}$ 上，且每个特征值的代数重数等于几何重数。

推论

设矩阵 A 在 $\mathbb{F}$ 上有 n 个不同特征值，则 A 必可对角化。

可对角化的充要条件 2

定理

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, 则下列命题等价:

1. A 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化;
2. A 在 $\mathbb{F}$ 上有 n 个线性无关的特征向量;
3. A 的特征多项式的根全在 $\mathbb{F}$ 上，且每个特征值的代数重数等于几何重数。

推论

设矩阵 A 在 $\mathbb{F}$ 上有 n 个不同特征值，则 A 必可对角化。反之未必。

实可对角化与复可对角化

推论

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是 n 阶实方阵。若 A 的所有特征值都是实数，则下列命题等价:

1. A 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化;

实可对角化与复可对角化

推论

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是 n 阶实方阵。若 A 的所有特征值都是实数，则下列命题等价：

1. A 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化；
2. A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化；

实可对角化与复可对角化

推论

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是 n 阶实方阵。若 A 的所有特征值都是实数，则下列命题等价：

1. A 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化；
2. A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化；
3. A 有 n 个线性无关的实特征向量。

判断 A 是否可对角化和求可逆阵 P 的方法

1. 计算 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda)$；

判断 A 是否可对角化和求可逆阵 P 的方法

1. 计算 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda)$；
2. 求 $\chi_A(\lambda)$ 的所有根。若不是所有根都在 $\mathbb{F}$ 上，则 A 在 $\mathbb{F}$ 上不可对角化；

判断 A 是否可对角化和求可逆阵 P 的方法

1. 计算 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda)$；
2. 求 $\chi_A(\lambda)$ 的所有根。若不是所有根都在 $\mathbb{F}$ 上，则 A 在 $\mathbb{F}$ 上不可对角化；
3. 设所有特征值都在 $\mathbb{F}$ 上，若某特征值的代数重数不等于几何重数，则 A 在 $\mathbb{F}$ 上不可对角化；

判断 A 是否可对角化和求可逆阵 P 的方法

1. 计算 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda)$；
2. 求 $\chi_A(\lambda)$ 的所有根。若不是所有根都在 $\mathbb{F}$ 上，则 A 在 $\mathbb{F}$ 上不可对角化；
3. 设所有特征值都在 $\mathbb{F}$ 上，若某特征值的代数重数不等于几何重数，则 A 在 $\mathbb{F}$ 上不可对角化；
4. 若所有特征值都在 $\mathbb{F}$ 上，且对每个特征值 λ_i，有 $s_i = n_i$，则 A 可对角化。

判断 A 是否可对角化和求可逆阵 P 的方法

1. 计算 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda)$；
2. 求 $\chi_A(\lambda)$ 的所有根。若不是所有根都在 $\mathbb{F}$ 上，则 A 在 $\mathbb{F}$ 上不可对角化；
3. 设所有特征值都在 $\mathbb{F}$ 上，若某特征值的代数重数不等于几何重数，则 A 在 $\mathbb{F}$ 上不可对角化；
4. 若所有特征值都在 $\mathbb{F}$ 上，且对每个特征值 λ_i，有 $s_i = n_i$，则 A 可对角化。

   将 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的基础解系 $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{is_i} (i = 1, \ldots, t)$ 凑成 $\mathbb{F}^n$ 的一个基 $(X_{11}, \ldots, X_{1s_1}; X_{21}, \ldots, X_{2s_2}, \ldots, X_{t1}, \ldots, X_{ts_t})$。记

$$P = (X_{11}, \ldots, X_{1s_1}, X_{21}, \cdots, X_{2s_2}, \ldots, X_{t1}, \ldots, X_{ts_t}),$$

   则 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，对角元分别是 A 的相应特征值。

例子

例

判断以下矩阵是否可对角化。若可以，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵，并求 A^{10}。

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

例子

例

判断以下矩阵是否可对角化。若可以，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵，并求 A^{10}。

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;

例子

例

判断以下矩阵是否可对角化。若可以，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵，并求 A^{10}。

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$。

例子

例

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda = 2$ 是二重特征值。试求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

例子

例

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是二重特征值。试求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

例

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$ 的特征多项式有一个二重根。求 a 的值，并讨论 A 是否相似于对角矩阵。

目录

线性变换可对角化定义

定义

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维空间 V 的线性变换，若存在 V 的一个基，使得 φ 在此基下的矩阵是对角矩阵，则称 φ 是可对角化的。
此时，对角元素恰为 φ 的特征值，而相应的基向量恰为该特征值的特征向量。

定义

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维空间 V 的线性变换，λ_0 是 φ 的一个特征值。
λ_0 作为特征多项式 $f_\varphi(\lambda)$ 的根的重数 n_0 称为 λ_0 的代数重数，λ_0 的特征子空间的维数称为 λ_0 的几何重数。

线性变换可对角化的充要条件

定理

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则下列命题等价

1. φ 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化;

线性变换可对角化的充要条件

定理

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则下列命题等价

1. φ 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化;
2. φ 在 $\mathbb{F}$ 上有 n 个线性无关的特征向量;

线性变换可对角化的充要条件

定理

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则下列命题等价

1. φ 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化；
2. φ 在 $\mathbb{F}$ 上有 n 个线性无关的特征向量；
3. φ 的特征多项式所有根都在 $\mathbb{F}$ 上，并且所有特征值的代数重数等于几何重数。

线性变换可对角化的充要条件

定理

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则下列命题等价

1. φ 在 $\mathbb{F}$ 上可对角化；
2. φ 在 $\mathbb{F}$ 上有 n 个线性无关的特征向量；
3. φ 的特征多项式所有根都在 $\mathbb{F}$ 上，并且所有特征值的代数重数等于几何重数。

推论

若数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换 φ 有 n 个不同的特征值，则 φ 可对角化。

目录

可对角化矩阵（变换）的几何解释

- A 可对角化 $\Leftrightarrow \mathbb{F}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$.

可对角化矩阵（变换）的几何解释

- A 可对角化 $\Leftrightarrow \mathbb{F}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$.

- $\forall \alpha \in \mathbb{F}^n$， α 可唯一分解为 $\alpha = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i$， $\alpha_i \in V_{\lambda_i} (i = 1, \ldots, t)$

可对角化矩阵（变换）的几何解释

- A 可对角化 $\Leftrightarrow \mathbb{F}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{F}^n$，$\alpha$ 可唯一分解为 $\alpha = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i$，$\alpha_i \in V_{\lambda_i} (i = 1, \ldots, t)$
- $A\alpha = \sum_{i=1}^{t} A\alpha_i = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \alpha_i,$

可对角化矩阵（变换）的几何解释

- A 可对角化 $\Leftrightarrow \mathbb{F}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{F}^n$，$\alpha$ 可唯一分解为 $\alpha = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i$，$\alpha_i \in V_{\lambda_i} (i = 1, \ldots, t)$
- $A\alpha = \sum\limits_{i=1}^{t} A\alpha_i = \sum\limits_{i=1}^{t} \lambda_i \alpha_i$,
- A 作用效果：不同方向上不同比例的伸缩。

按基变换理解可对角化线性变换

- 设 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \triangleq B$,

按基变换理解可对角化线性变换

- 设 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \triangleq B$,
- $P = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一组基,

按基变换理解可对角化线性变换

- 设 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \triangleq B$,

- $P = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一组基,

- $\forall \alpha = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{F}^n$， α 也是它在标准基 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ 下的坐标向量

按基变换理解可对角化线性变换

按下面 3 个步骤来获得 $A\alpha$：

按基变换理解可对角化线性变换

按下面 3 个步骤来获得 $A\alpha$：

1. α 左乘矩阵 P^{-1}

按基变换理解可对角化线性变换

按下面 3 个步骤来获得 $A\alpha$:

1. α 左乘矩阵 P^{-1} ：记 $\beta = P^{-1}\alpha \triangleq (b_1, \ldots, b_n)^T$

按基变换理解可对角化线性变换

按下面 3 个步骤来获得 $A\alpha$：

1. α 左乘矩阵 P^{-1}：记 $\beta = P^{-1}\alpha \triangleq (b_1, \dots, b_n)^T$，则 β 是向量 α 在基 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 下的坐标向量。

按基变换理解可对角化线性变换

按下面 3 个步骤来获得 $A\alpha$:

1. α 左乘矩阵 P^{-1}：记 $\beta = P^{-1}\alpha \triangleq (b_1, \ldots, b_n)^T$，则 β 是向量 α 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标向量。
2. β 左乘矩阵 B

按基变换理解可对角化线性变换

按下面 3 个步骤来获得 $A\alpha$：

1. α 左乘矩阵 P^{-1}： 记 $\beta = P^{-1}\alpha \triangleq (b_1, \ldots, b_n)^T$，则 β 是向量 α 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标向量。
2. β 左乘矩阵 B： 获得变换后的像 $A\alpha$ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标为 $B\beta = (\lambda_1 b_1, \ldots, \lambda_n b_n)^T$。

按基变换理解可对角化线性变换

按下面 3 个步骤来获得 $A\alpha$:

1. α 左乘矩阵 P^{-1}： 记 $\beta = P^{-1}\alpha \triangleq (b_1, \ldots, b_n)^T$，则 β 是向量 α 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标向量。
2. β 左乘矩阵 B： 获得变换后的像 $A\alpha$ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标为 $B\beta = (\lambda_1 b_1, \ldots, \lambda_n b_n)^T$。
3. $B\beta$ 左乘矩阵 P

按基变换理解可对角化线性变换

按下面 3 个步骤来获得 $A\alpha$:

1. α 左乘矩阵 P^{-1} ： 记 $\beta = P^{-1}\alpha \triangleq (b_1, \ldots, b_n)^T$，则 β 是向量 α 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标向量。
2. β 左乘矩阵 B ： 获得变换后的像 $A\alpha$ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标为 $B\beta = (\lambda_1 b_1, \ldots, \lambda_n b_n)^T$。
3. $B\beta$ 左乘矩阵 P ： 还原向量 $A\alpha$ 为其标准基下的坐标向量

按基变换理解可对角化线性变换

按下面 3 个步骤来获得 $A\alpha$：

1. α 左乘矩阵 P^{-1}：记 $\beta = P^{-1}\alpha \triangleq (b_1, \ldots, b_n)^T$，则 β 是向量 α 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标向量。
2. β 左乘矩阵 B：获得变换后的像 $A\alpha$ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标为 $B\beta = (\lambda_1 b_1, \ldots, \lambda_n b_n)^T$。
3. $B\beta$ 左乘矩阵 P：还原向量 $A\alpha$ 为其标准基下的坐标向量，即

$$A\alpha = (\xi_1, \ldots, \xi_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 b_1 \\ \vdots \\ \lambda_n b_n \end{pmatrix} = PB\beta = PBP^{-1}\alpha.$$