7.3 特征值与特征向量

高等代数 https://gdfzu.club

目录

引入

- 对给定有限维线性空间 V 上的线性变换，能否找到 V 的一组基，使得该线性变换在这组基下的矩阵具有特别简单的形式。

引入

- 对给定有限维线性空间 V 上的线性变换，能否找到 V 的一组基，使得该线性变换在这组基下的矩阵具有特别简单的形式。

- 用矩阵的语言说，就是对于给定的 n 阶方阵，能否相似于一个形式比较简单的矩阵

引入

- 对给定有限维线性空间 V 上的线性变换，能否找到 V 的一组基，使得该线性变换在这组基下的矩阵具有特别简单的形式。

- 用矩阵的语言说，就是对于给定的 n 阶方阵，能否相似于一个形式比较简单的矩阵，比如对角矩阵。

分析

给定 n 阶方阵 A，A 相似于对角矩阵 $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$

分析

给定 n 阶方阵 A，A 相似于对角矩阵 $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
$\Leftrightarrow$ 存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = D$，

分析

给定 n 阶方阵 A，A 相似于对角矩阵 $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$
$\Leftrightarrow$ 存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=D$，即 $AP=PD$

分析

给定 n 阶方阵 A，A 相似于对角矩阵 $D=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

$\Leftrightarrow$ 存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=D$，即 $AP=PD$

$\Leftrightarrow$ 存在 n 个线性无关的 n 维列向量 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$，使得

$$A(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix},$$

分析

给定 n 阶方阵 A，A 相似于对角矩阵 $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$\Leftrightarrow$ 存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = D$，即 $AP = PD$

$\Leftrightarrow$ 存在 n 个线性无关的 n 维列向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$，使得

$$A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即

$$(A\alpha_1, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \ldots, \lambda_n\alpha_n)$$

分析

给定 n 阶方阵 A，A 相似于对角矩阵 $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
$\Leftrightarrow$ 存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = D$，即 $AP = PD$
$\Leftrightarrow$ 存在 n 个线性无关的 n 维列向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$，使得

$$A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即

$$(A\alpha_1, \ldots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \ldots, \lambda_n\alpha_n)$$

$\Leftrightarrow$ 存在 n 个线性无关的 n 维列向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 满足

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1,\ \ldots,\ A\alpha_n = \lambda_n\alpha_n.$$

目录

矩阵特征值、特征向量定义

定义

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵, 若存在 $\lambda \in \mathbb{F}, 0 \neq X \in \mathbb{F}^n$，使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 是 A 的一个特征值, X 是 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量。

举例

例

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},$

举例

例

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，由于

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

举例

例

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，由于

$$AX=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$$

举例

例

设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，由于

$$AX=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2X,$$

举例

例

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，由于

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2X,$$

因此，2 是 A 的一个特征值，

举例

例

设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，由于

$$AX=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2X,$$

因此，2 是 A 的一个特征值，X 是 A 的属于特征值 2 的一个特征向量。

特征子空间

注

1. 一个特征向量所对应的特征值是唯一确定的。

特征子空间

注

1. 一个特征向量所对应的特征值是唯一确定的。
2. 一个特征值所对应的特征向量不是唯一的。

特征子空间

注

1. 一个特征向量所对应的特征值是唯一确定的。
2. 一个特征值所对应的特征向量不是唯一的。

事实上，若 X_1, X_2 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，即

$$AX_1 = \lambda X_1,\ AX_2 = \lambda X_2,$$

特征子空间

注

1. 一个特征向量所对应的特征值是唯一确定的。
2. 一个特征值所对应的特征向量不是唯一的。

事实上，若 X_1, X_2 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，即

$$AX_1 = \lambda X_1,\ AX_2 = \lambda X_2,$$

则

$$A(X_1 + X_2) = \lambda(X_1 + X_2),\ A(cX_1) = \lambda(cX_1).$$

特征子空间

定义

设 λ 是 A 的一个特征值，则

$$V_\lambda = \{X \in \mathbb{F}^n | \ AX = \lambda X\}$$

是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间，称之为 A 的属于特征值 λ 的特征子空间。

特征子空间

定义

设 λ 是 A 的一个特征值，则

$$V_\lambda = \{X \in \mathbb{F}^n |\ AX = \lambda X\}$$

是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间，称之为 A 的属于特征值 λ 的特征子空间。

- 是否 V_λ 中的向量都是特征向量?

特征值、特征向量的求法

λ_0 是矩阵 A 的一个特征值，α 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量

特征值、特征向量的求法

λ_0 是矩阵 A 的一个特征值，α 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量

$\Leftrightarrow\ A\alpha = \lambda_0\alpha,\ \lambda_0 \in \mathbb{F},\ \alpha \neq 0$

特征值、特征向量的求法

λ_0 是矩阵 A 的一个特征值，α 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量

$$\Leftrightarrow \; A\alpha = \lambda_0\alpha,\ \lambda_0 \in \mathbb{F},\ \alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \; (\lambda_0 E - A)\alpha = 0,\ \lambda_0 \in \mathbb{F},\ \alpha \neq 0$$

特征值、特征向量的求法

λ_0 是矩阵 A 的一个特征值，α 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量

$\Leftrightarrow\ A\alpha=\lambda_0\alpha,\ \lambda_0\in\mathbb{F},\ \alpha\neq 0$

$\Leftrightarrow\ (\lambda_0 E-A)\alpha=0,\ \lambda_0\in\mathbb{F},\ \alpha\neq 0$

$\Leftrightarrow$ α 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 E-A)X=0$ 的一个非零解，$\lambda_0\in\mathbb{F}$

特征值、特征向量的求法

λ_0 是矩阵 A 的一个特征值，α 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量

$\Leftrightarrow\ A\alpha = \lambda_0\alpha,\ \lambda_0 \in \mathbb{F},\ \alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow\ (\lambda_0 E - A)\alpha = 0,\ \lambda_0 \in \mathbb{F},\ \alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow \alpha$ 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的一个非零解，$\lambda_0 \in \mathbb{F}$

$\Leftrightarrow \det(\lambda_0 E - A) = 0$，$\alpha$ 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的一个非零解，$\lambda_0 \in \mathbb{F}$

特征多项式定义

定义

$$\det(\lambda E_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 A 的特征多项式，记为$\chi_A(\lambda)$（或 $\chi_A(\lambda)$ ）。

特征多项式

注

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，则

1. λ_0 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow$ λ_0 是 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}$ 中的根。

特征多项式

注

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，则

1. λ_0 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow$ λ_0 是 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda)$ 在 $\mathbb{F}$ 中的根。
2. α 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量 $\Leftrightarrow$ α 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的一个非零解。

特征值、特征向量的求法步骤

1. 计算 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$；

特征值、特征向量的求法步骤

1. 计算 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$；
2. 求出 $\chi_A(\lambda)$ 的所有根，在 $\mathbb{F}$ 中的是特征值；

特征值、特征向量的求法步骤

1. 计算 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$；
2. 求出 $\chi_A(\lambda)$ 的所有根，在 $\mathbb{F}$ 中的是特征值；
3. 对每个特征值 λ_0，求齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的一个基础解系 $X_1, \ldots, X_s$，则

$$c_1 X_1 + \cdots + c_s X_s$$

即是对应于特征值 λ_0 的全部特征向量, 其中 c_i 为 $\mathbb{F}$ 上不全为零的常数。

例子

例

求下三角矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的特征值。

例子

例

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

例子

例

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

例

在复数域上求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。

特征多项式性质

定理

设 A 是 n 阶方阵, 则

$$\chi_A(\lambda) = \chi_{A^T}(\lambda).$$

因而 A 与 A 的转置 A^T 有相同的特征值。

特征多项式性质

定理

设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, 若 A 相似于 B，则

$$\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda).$$

因而相似矩阵有相同的特征值。

特征多项式性质

定理

设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, 若 A 相似于 B，则

$$\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda).$$

因而相似矩阵有相同的特征值。

- 反之不然，即有相同特征多项式的矩阵未必相似。

特征多项式性质

定理

设 A, B 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, 若 A 相似于 B，则

$$\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda).$$

因而相似矩阵有相同的特征值。

- 反之不然，即有相同特征多项式的矩阵未必相似。比如，2 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征多项式均为 $(\lambda - 1)^2$，但 A、B 不相似。

特征多项式性质

定理

设 A 是 n 阶方阵, 记

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_0,$$

则

$$a_{n-1} = \operatorname{tr}(A),\ a_0 = \det A.$$

特征多项式性质

定理

设 A 是 n 阶方阵, 记

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_0,$$

则

$$a_{n-1} = \operatorname{tr}(A),\ a_0 = \det A.$$

推论

若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的全部特征值, 则

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\ \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

可逆与特征值

推论

设 A 是 n 阶方阵，则 A 是可逆的充分必要条件是 A 的特征值全不为零。

可逆与特征值

推论

设 A 是 n 阶方阵，则 A 是可逆的充分必要条件是 A 的特征值全不为零。

例

设 A 是 3 阶矩阵且 $A+E, 3E-A, E-3A$ 均不可逆。证明：矩阵 A 可逆。

AB 与 BA 的特征值

例

设 A, B 为 n 阶方阵，证明：$\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$。

AB 与 BA 的特征值

例

设 A, B 为 n 阶方阵，证明：$\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$。

例

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ 且 $m \geq n$。证明：

AB 与 BA 的特征值

例

设 A, B 为 n 阶方阵，证明：$\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$。

例

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ 且 $m \geq n$。证明：

1. $\det(\lambda E_m - AB) = \lambda^{m-n} \det(\lambda E_n - BA)$;

AB 与 BA 的特征值

例

设 A, B 为 n 阶方阵，证明：$\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$。

例

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ 且 $m \geq n$。证明：

1. $\det(\lambda E_m - AB) = \lambda^{m-n} \det(\lambda E_n - BA)$;
2. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$。

例子

例

设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，证明：$\chi_A(\lambda)=\chi_{A_1}(\lambda)\chi_{A_2}(\lambda)$。

特征向量间的线性关系

定理

数域 $\mathbb{F}$ 上属于不同特征值的特征向量线性无关。

特征向量间的线性关系

定理

数域 $\mathbb{F}$ 上属于不同特征值的特征向量线性无关。

推论

设 n 阶方阵 A 的不同特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$，齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的基础解系为 $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{is_i}, (i = 1, \ldots, t)$，则向量组

$$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1s_1}; X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2s_2}; \ldots; X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{ts_t}$$

线性无关，即 $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_t}$ 是直和。

目录

引入

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间，φ 是 V 上线性变换，φ 在 V 的一个基 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 下的矩阵为 A，即

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)A$$

引入

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间，φ 是 V 上线性变换，φ 在 V 的一个基 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 下的矩阵为 A，即

$$\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)A$$

对 $\alpha\in V$，α 在 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 下的坐标为 X，则

引入

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间，φ 是 V 上线性变换，φ 在 V 的一个基 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 下的矩阵为 A，即

$$\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)A$$

对 $\alpha\in V$，α 在 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 下的坐标为 X，则

- $\varphi(\alpha)$ 在 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 下的坐标为 AX,

引入

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间，φ 是 V 上线性变换，φ 在 V 的一个基 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 下的矩阵为 A，即

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)A$$

对 $\alpha \in V$，α 在 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 下的坐标为 X，则

- $\varphi(\alpha)$ 在 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 下的坐标为 AX,
- $\lambda\alpha$ 在 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 下的坐标为 λX。

引入

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间，φ 是 V 上线性变换，φ 在 V 的一个基 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 下的矩阵为 A，即

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)A$$

对 $\alpha \in V$，α 在 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 下的坐标为 X，则

- $\varphi(\alpha)$ 在 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 下的坐标为 AX,
- $\lambda\alpha$ 在 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 下的坐标为 λX。

所以 $\varphi(\alpha) = \lambda\alpha$ 的充分必要条件是 $AX = \lambda X$。

定义

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，若存在 $\lambda_0 \in \mathbb{F}, 0 \neq \alpha \in V$，使得

$$\varphi(\alpha) = \lambda_0\alpha,$$

则称 λ_0 是线性变换 φ 的一个特征值，α 为 φ 的属于特征值 λ_0 的特征向量。而将

$$V_{\lambda_0} = \{\alpha \in V \mid \varphi(\alpha) = \lambda_0\alpha\}$$

称为 φ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间。

定义

设 φ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，若存在 $\lambda_0 \in \mathbb{F}, 0 \neq \alpha \in V$，使得

$$\varphi(\alpha) = \lambda_0 \alpha,$$

则称 λ_0 是线性变换 φ 的一个特征值，α 为 φ 的属于特征值 λ_0 的特征向量。而将

$$V_{\lambda_0} = \{\alpha \in V | \, \varphi(\alpha) = \lambda_0 \alpha\}$$

称为 φ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间。

注

V_{λ_0} 是 φ-子空间，且 φ 在 V_{λ_0} 上的限制 $\varphi|_{V_{\lambda_0}}$ 是一个数量变换，即是一个伸缩变换。

线性变换的特征多项式

- 线性变换不同基下的矩阵是相似的。

线性变换的特征多项式

- 线性变换不同基下的矩阵是相似的。
- 相似矩阵有相同的特征多项式。

线性变换的特征多项式

- 线性变换不同基下的矩阵是相似的。
- 相似矩阵有相同的特征多项式。

定义

设 φ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，φ 在 V 的基 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 下的矩阵为 A，$\chi_A(\lambda)$ 是 A 的特征多项式。我们称 $\chi_A(\lambda)$ 为 φ 的特征多项式，记为$\chi_\varphi(\lambda)$。

线性变换特征值、特征向量性质

- 设 φ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则 φ 的属于不同特征值的特征向量线性无关。

线性变换特征值、特征向量性质

- 设 φ 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则 φ 的属于不同特征值的特征向量线性无关。

- 设 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间的线性变换 φ 的不同特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$，$\mathrm{Ker}(\lambda_i \mathrm{id}_V - \varphi)$ 即 V_{λ_i} 的基为 $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{is_i}, (i = 1, \ldots, t)$，则向量组

$$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1s_1}; X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2s_2}; \cdots; X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{ts_t}$$

线性无关。即 $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_t}$ 是直和。

目录

复矩阵相似于上三角矩阵

定理

复数域上任一 n 阶方阵必复相似于一个上三角阵。这时主对角线上元素就是它的所有特征值。

复矩阵相似于上三角矩阵

定理

复数域上任一 n 阶方阵必复相似于一个上三角阵。这时主对角线上元素就是它的所有特征值。

注

1. 一般数域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵未必相似于 $\mathbb{F}$ 上的上三角矩阵。

复矩阵相似于上三角矩阵

定理

复数域上任一 n 阶方阵必复相似于一个上三角阵。这时主对角线上元素就是它的所有特征值。

注

1. 一般数域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵未必相似于 $\mathbb{F}$ 上的上三角矩阵。
2. 若数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵的特征值全在 $\mathbb{F}$ 中，则存在 $\mathbb{F}$ 上可逆阵 P，使 $P^{-1}AP$ 是上三角矩阵。

例子

例

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，$g(x) \in \mathbb{F}[x]$，证明：

1. 若 λ 是 A 的特征值，则 $g(\lambda)$ 是矩阵 $g(A)$ 的特征值；

例子

例

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，$g(x) \in \mathbb{F}[x]$，证明:

1. 若 λ 是 A 的特征值，则 $g(\lambda)$ 是矩阵 $g(A)$ 的特征值;
2. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值, 则 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$ 是 $g(A)$ 的全部特征值。

例子

例

设 A 是 3 阶方阵，X_1, X_2 是 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量，向量 X_3 满足

$$AX_3 = X_2 + X_3.$$

1. 证明：X_1, X_2, X_3 线性无关；

例子

例

设 A 是 3 阶方阵，X_1, X_2 是 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量，向量 X_3 满足

$$AX_3 = X_2 + X_3.$$

1. 证明：X_1, X_2, X_3 线性无关；
2. 令 $P = (X_1, X_2, X_3)$，求 $P^{-1}AP$。

例子

例

设 A 是 3 阶方阵，X_1, X_2 是 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量，向量 X_3 满足

$$AX_3 = X_2 + X_3.$$

1. 证明：X_1, X_2, X_3 线性无关；
2. 令 $P = (X_1, X_2, X_3)$，求 $P^{-1}AP$。

例

设 φ 是复数域上的 n 维线性空间 V 线性变换。证明：对任意满足 $1 \leq r \leq n$ 的整数 r，总存在 V 的 r 维 φ-子空间.