7.2 不变子空间

刘月 liuyue@fzu.edu.cn

福州大学 数学与统计学院

目录

不变子空间

定义

设 U 是 V 的子空间，$\phi \in \mathcal{L}(V)$，且满足 $\phi(U) \subseteq U$，则称 U 是ϕ-不变子空间或ϕ-子空间。

不变子空间

定义

设 U 是 V 的子空间，$\phi \in \mathcal{L}(V)$，且满足 $\phi(U) \subseteq U$，则称 U 是ϕ-不变子空间或ϕ-子空间。

将 ϕ 限制在 U 上，导出 U 的线性变换，称为由 ϕ导出变换(或称为 ϕ 在 U 的限制变换)，记为 $\phi|_U$。

不变子空间

定义

设 U 是 V 的子空间，$\phi \in \mathcal{L}(V)$，且满足 $\phi(U) \subseteq U$，则称 U 是ϕ-不变子空间或ϕ-子空间。

将 ϕ 限制在 U 上，导出 U 的线性变换，称为由 ϕ导出变换(或称为 ϕ 在 U 的限制变换)，记为 $\phi|_U$。

- ϕ 与 $\phi|_U$ 的相同点是在 U 上对应法则一样；不同点是 ϕ 是 V 的线性变换；而 $\phi|_U$ 是 U 的线性变换。

不变子空间

定义

设 U 是 V 的子空间，$\phi \in \mathcal{L}(V)$，且满足 $\phi(U) \subseteq U$，则称 U 是ϕ-不变子空间或ϕ-子空间。
将 ϕ 限制在 U 上，导出 U 的线性变换，称为由 ϕ导出变换(或称为 ϕ 在 U 的限制变换)，记为 $\phi|_U$。

- ϕ 与 $\phi|_U$ 的相同点是在 U 上对应法则一样；不同点是 ϕ 是 V 的线性变换；而 $\phi|_U$ 是 U 的线性变换。
- 定义中 U 是 ϕ 的不变子空间这个条件不可少，否则无法导出 U 上的线性变换。

不变子空间举例

例

1. 线性空间 V 本身和零子空间是任一线性变换的不变子空间，称为平凡的不变子空间；

不变子空间举例

例

1. 线性空间 V 本身和零子空间是任一线性变换的不变子空间，称为平凡的不变子空间；
2. 对数乘变换 $\phi = c\,\mathrm{id}_V$，V 的任一子空间都是 ϕ-子空间。

不变子空间举例

例

1. 线性空间 V 本身和零子空间是任一线性变换的不变子空间，称为平凡的不变子空间；
2. 对数乘变换 $\phi = c\mathrm{id}_V$，V 的任一子空间都是 ϕ-子空间。

例

设 ϕ 是 V 的线性变换，则 $\mathrm{Ker}\phi$、$\mathrm{Im}\phi$ 是 ϕ-子空间。

不变子空间举例

例

设 $0<\theta<\pi$，$\phi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ 在标准基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$。则 ϕ没有非平凡的不变子空间。

不变子空间的判定

命题

设 $\phi \in \mathcal{L}(V)$，$\xi_1, \ldots, \xi_s \in V$，则 $\langle \xi_1, \ldots, \xi_s \rangle$ 是 ϕ-不变子空间的充分必要条件为

$$\phi(\xi_i) \in \langle \xi_1, \ldots, \xi_s \rangle, i = 1, \ldots, s.$$

不变子空间的判定

命题

设 $\phi \in \mathcal{L}(V)$，$\xi_1, \ldots, \xi_s \in V$，则 $\langle \xi_1, \ldots, \xi_s \rangle$ 是 ϕ-不变子空间的充分必要条件为

$$\phi(\xi_i) \in \langle \xi_1, \ldots, \xi_s \rangle, i = 1, \ldots, s.$$

命题

设 V_1, V_2 都是线性变换 ϕ-不变子空间，则

$$V_1 + V_2, \quad V_1 \cap V_2$$

仍然是 ϕ-不变子空间。

目录

不变子空间与块上三角矩阵的关系

设 $\phi \in \mathcal{L}(V)$，U 是 ϕ 的不变子空间。

不变子空间与块上三角矩阵的关系

设 $\phi \in \mathcal{L}(V)$，U 是 ϕ 的不变子空间。设 $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ 是 U 的一个基，将其扩为 V 的一个基 $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$，

不变子空间与块上三角矩阵的关系

设 $\phi \in \mathcal{L}(V)$，U 是 ϕ 的不变子空间。设 $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ 是 U 的一个基，将其扩为 V 的一个基 $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$，则 ϕ 在此基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{r,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}. \tag{*}$$

不变子空间与块上三角矩阵的关系

设 $\phi \in \mathcal{L}(V)$，U 是 ϕ 的不变子空间。设 $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ 是 U 的一个基，将其扩为 V 的一个基 $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$，则 ϕ 在此基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{r,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

反之，若 ϕ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 下的矩阵为 (*)，则 $\langle \xi_1, \ldots, \xi_r \rangle$ 是一个 ϕ-子空间。

不变子空间与块对角矩阵的关系

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$V = V_1 \oplus V_2$，V_1 与 V_2 是 ϕ-子空间，

不变子空间与块对角矩阵的关系

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$V = V_1 \oplus V_2$，V_1 与 V_2 是 ϕ-子空间，$(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ 是 V_1 的基，$(\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 是 V_2 的基，

不变子空间与块对角矩阵的关系

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$V = V_1 \oplus V_2$，V_1 与 V_2 是 ϕ-子空间，$(\xi_1, \dots, \xi_r)$ 是 V_1 的基，$(\xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$ 是 V_2 的基，则在基 $(\xi_1, \dots, \xi_r, \xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \tag{**}$$

其中 A_1 是 r 阶方阵，A_2 是 $n-r$ 阶方阵。

不变子空间与块对角矩阵的关系

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$V = V_1 \oplus V_2$，V_1 与 V_2 是 ϕ-子空间，$(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ 是 V_1 的基，$(\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 是 V_2 的基，则在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \tag{**}$$

其中 A_1 是 r 阶方阵，A_2 是 $n-r$ 阶方阵。
反之，若 ϕ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 下的矩阵是 (**)，

不变子空间与块对角矩阵的关系

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$V = V_1 \oplus V_2$，V_1 与 V_2 是 ϕ-子空间，$(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ 是 V_1 的基，$(\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 是 V_2 的基，则在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \tag{**}$$

其中 A_1 是 r 阶方阵，A_2 是 $n-r$ 阶方阵。
反之，若 ϕ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 下的矩阵是 (**)，令

$$V_1 = \langle \xi_1, \ldots, \xi_r \rangle, \quad V_2 = \langle \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n \rangle,$$

不变子空间与块对角矩阵的关系

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$V = V_1 \oplus V_2$，V_1 与 V_2 是 ϕ-子空间，$(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ 是 V_1 的基，$(\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 是 V_2 的基，则在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

其中 A_1 是 r 阶方阵，A_2 是 $n - r$ 阶方阵。
反之，若 ϕ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 下的矩阵是 (**)，令

$$V_1 = \langle \xi_1, \ldots, \xi_r \rangle, \quad V_2 = \langle \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n \rangle,$$

则 V_1、V_2 都是 ϕ-子空间，且

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

不变子空间与块对角矩阵的关系

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$V = V_1 \oplus V_2$，V_1 与 V_2 是 ϕ-子空间，$(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ 是 V_1 的基，$(\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 是 V_2 的基，则在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \tag{**}$$

其中 A_1 是 r 阶方阵，A_2 是 $n-r$ 阶方阵。
反之，若 ϕ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 下的矩阵是 (**)，令

$$V_1 = \langle \xi_1, \ldots, \xi_r \rangle, \quad V_2 = \langle \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n \rangle,$$

则 V_1、V_2 都是 ϕ-子空间，且

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

- 结论可推广到 m 个不变子空间的情形。

不变子空间与线性变换的矩阵化简

定理

设 $\phi \in \mathcal{L}(V)$，则 ϕ 在 V 的某个基下矩阵是块对角矩阵$\Leftrightarrow$$V$ 可分解为一些 ϕ 的不变子空间的直和。

具体例子

例

设 V 是 3 维线性空间，V 的线性变换 ϕ 在基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

求证: $\langle \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 \rangle$ 是 ϕ-子空间。

例子

例

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，U 是 V 的 ϕ 子空间。若 ϕ 可逆，求证：

1. $\phi|_U$ 可逆；

例子

例

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，U 是 V 的 ϕ 子空间。若 ϕ 可逆，求证：

1. $\phi|_U$ 可逆；
2. U 是 ϕ^{-1}-子空间；

例子

例

设 ϕ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，U 是 V 的 ϕ 子空间。若 ϕ 可逆，求证：

1. $\phi|_U$ 可逆；
2. U 是 ϕ^{-1}-子空间；
3. $(\phi|_U)^{-1} = \phi^{-1}|_U$。

极小不变子空间

- 给定 ϕ 和 $\alpha \neq 0$，如何求包含 α 的最小 ϕ-子空间?

极小不变子空间

- 给定 ϕ 和 $\alpha \neq 0$，如何求包含 α 的最小 ϕ-子空间?

例

设 ϕ 是线性空间 V 上的线性变换，$0 \neq \alpha \in V$，k 为满足 $\alpha, \phi(\alpha), \ldots, \phi^{k-1}(\alpha)$ 线性无关的最大整数。记

$$W = \langle \alpha, \phi(\alpha), \ldots, \phi^{k-1}(\alpha) \rangle.$$

证明 W 是包含 α 的最小不变子空间，并给出 $\phi|_W$ 的一个表示矩阵。