7.1 线性变换与矩阵相似

高等代数 https://gdfzu.club

目录

概念

定义

设 V 是一个数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\varphi: V \to V$ 是 V 上的一个映射。若对任意 $\alpha, \beta \in V$，及任意 $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$

$$\varphi(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) = c_1\varphi(\alpha_1) + c_2\varphi(\alpha_2),$$

则称 φ 是 V 上的一个线性变换。

线性变换举例

例

当 $V=\mathbb{F}^n$ 时，取 A 是一个 n 阶方阵，则

$$\varphi_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n,\varphi_A(\alpha)=A\alpha,\forall\alpha\in\mathbb{F}^n$$

是一个线性变换。

线性变换举例

例

当 $V=\mathbb{F}^n$ 时，取 A 是一个 n 阶方阵，则

$$\varphi_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n,\varphi_A(\alpha)=A\alpha,\forall\alpha\in\mathbb{F}^n$$

是一个线性变换。

- 有限维空间中的线性变换都可以按方阵来理解

线性变换举例

例

当 $V=\mathbb{F}^n$ 时，取 A 是一个 n 阶方阵，则

$$\varphi_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n,\varphi_A(\alpha)=A\alpha,\forall\alpha\in\mathbb{F}^n$$

是一个线性变换。

- 有限维空间中的线性变换都可以按方阵来理解

例

设 $c\in\mathbb{F}$。φ 是将 V 任意元素 α 变为 $c\alpha$ 的映射，容易验证 φ 是 V 上的线性变换，称为数乘变换，记为 $c\mathrm{id}_V$。

线性变换举例

例

当 $V = \mathbb{F}^n$ 时，取 A 是一个 n 阶方阵，则

$$\varphi_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n, \varphi_A(\alpha) = A\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{F}^n$$

是一个线性变换。

- 有限维空间中的线性变换都可以按方阵来理解

例

设 $c \in \mathbb{F}$。φ 是将 V 任意元素 α 变为 $c\alpha$ 的映射，容易验证 φ 是 V 上的线性变换，称为数乘变换，记为 $c\mathrm{id}_V$。

- 零变换、恒等变换

线性变换举例

例

取 $V=\mathbb{R}^2$，$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，

$$\varphi_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\varphi_A(\alpha)=A\alpha,\forall\alpha\in\mathbb{R}^2,$$

其中 θ 是一个用弧度制表示的角度。则 φ_A 的作用效果相当于对坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 沿逆时针方向绕坐标原点旋转 θ 角。

线性变换举例

例

设 V_1 和 V_2 是线性空间 V 的子空间，且 $V = V_1 \oplus V_2$。对任意 $v \in V$ 有唯一的分解 $v = v_1 + v_2$，其中 $v_1 \in V_1$，$v_2 \in V_2$，定义：

$$P : V \to V,\ P(v) = v_1.$$

容易验证 P 是 V 上的线性变换，称为这个变换为 V 到 V_1 的投影变换。

线性变换举例

例

取 $V = C^\infty(a,b)$，即在开区间 (a,b) 上无穷次可微函数全体构成的线性空间。对任意 $f(x) \in C^\infty(a,b)$，定义

$$\mathrm{D} : f(x) \mapsto f'(x),$$

则 D 是 $C^\infty(a,b)$ 上的线性变换。D 也被称为微分算子。

线性变换举例

例 Lie 变换

取 $V=\mathbb{F}^{n\times n}$，A 是一个给定的 n 阶方阵。对任意 $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$，定义

$$\mathrm{ad}_A(B)=AB-BA,$$

则 ad_A 是 n 阶方阵空间上的线性变换。

目录

线性变换的表示矩阵

- 线性变换由基的像决定

线性变换的表示矩阵

- 线性变换由基的像决定
- $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)A$

线性变换的表示矩阵

- 线性变换由基的像决定
- $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)A$
- A：φ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的表示矩阵

表示矩阵举例

例

设 $V = \mathbb{F}_n[x]$，φ 为 V 上的求导变换，求 φ 在基 $(1, x, \ldots, x^{n-1})$ 下的表示矩阵，并利用表示矩阵演示 φ 的作用效果。

相似

- 问题：对于同一个线性变换 φ，φ 在 V 两个不同基下的表示矩阵有什么关系？

相似

- 问题：对于同一个线性变换 φ，φ 在 V 两个不同基下的表示矩阵有什么关系？

定理

设 φ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，$(\xi_1,\dots,\xi_n)$ 和 $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ 是 V 的两个基，且

$$(\eta_1,\dots,\eta_n)=(\xi_1,\dots,\xi_n)P.$$

若

$$\varphi(\xi_1,\dots,\xi_n)=(\xi_1,\dots,\xi_n)A,$$
$$\varphi(\eta_1,\dots,\eta_n)=(\eta_1,\dots,\eta_n)B,$$

则

$$B=P^{-1}AP.$$

相似关系

定义

设 A、$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。若存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称A 相似于 B，记作$A \sim B$。

相似关系

定义

设 A、$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。若存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称 A 相似于 B，记作 $A \sim B$。

- 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似；

相似关系

定义

设 A、$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。若存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称A 相似于 B，记作$A \sim B$。

- 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似；
- 若 A 与 B 相似，则我们也可以认为 A 和 B 是同一个线性变换在不同基下的矩阵；

相似关系

定义

设 A、$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。若存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称A 相似于 B，记作$A \sim B$。

- 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似；
- 若 A 与 B 相似，则我们也可以认为 A 和 B 是同一个线性变换在不同基下的矩阵；
- 相似是特殊的相抵；

相似关系

定义

设 A、$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。若存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称A 相似于 B，记作$A \sim B$。

- 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似；
- 若 A 与 B 相似，则我们也可以认为 A 和 B 是同一个线性变换在不同基下的矩阵；
- 相似是特殊的相抵；
- 相似关系是等价关系；

相似关系

定义

设 A、$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$。若存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称A 相似于 B，记作$A \sim B$。

- 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似；
- 若 A 与 B 相似，则我们也可以认为 A 和 B 是同一个线性变换在不同基下的矩阵；
- 相似是特殊的相抵；
- 相似关系是等价关系；
- 核心问题: 对于一个线性变换 φ，其“最简单”的表示矩阵会是什么形式的矩阵？