第六章 一般线性空间与线性映射

$6.1 一般线性空间的定义与举例

高代试验田 https://gdfzu.club

回顾：基于列向量加法和数乘的代数系统

记 $\mathbb{F}^m := \{(a_1, \cdots, a_m)^\top | a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{F}\}$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上全体 m 维列向量构成的集合。定义 $\mathbb{F}^m$ 中向量之间的加法和数乘运算如下：

1. **加法**：设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_m)^\top, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^\top$ 为 $\mathbb{F}^m$ 中两个向量，定义加法 $(+)$ 运算

$$\alpha + \beta := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_m + b_m)^\top.$$

2. **数乘**：设 $c \in \mathbb{F}, \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_m)^\top \in \mathbb{F}^m$，定义数乘 $(\cdot)$ 运算

$$c \cdot \alpha := (ca_1, ca_2, \cdots, ca_m)^\top.$$

列向量加法和数乘所满足的性质

- 列向量加法所满足性质：
  1. 封闭性：任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}^m$ 满足 $\alpha + \beta \in \mathbb{F}^m$；
  2. 结合律：任意 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}^m$ 满足 $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$；
  3. 交换律：任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}^m$ 满足 $\alpha + \beta = \beta + \gamma$；
  4. 有 0 元：存在 $(0, 0, \cdots, 0)^\top \in \mathbb{F}^m$ 使得对于任意 $\alpha \in \mathbb{F}^m$ 有 $(0, 0, \cdots, 0)^\top + \alpha = \alpha$；
  5. 有逆元：对于任意 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_m)^\top \in \mathbb{F}^m$，存在 $-\alpha = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_m)^\top$ 使得 $(-\alpha) + \alpha = 0$。
- 列向量数乘满足性质：
  - 封闭性：任意 $\alpha \in \mathbb{F}^m, c \in \mathbb{F}$ 满足 $c\alpha \in \mathbb{F}^m$；
  - 对 $\mathbb{F}$ 中的幺元 1 和任意 $\alpha \in \mathbb{F}^m$，有 $1\alpha = \alpha$；
  - 对于任意 $c, d \in \mathbb{F}$ 和任意 $\alpha \in \mathbb{F}^m$，有 $(cd)\alpha = c(d\alpha)$；
  - 对于任意 $c, d \in \mathbb{F}$ 和任意 $\alpha \in \mathbb{F}^m$，有 $(c + d)\alpha = c\alpha + d\alpha$；
  - 对于任意 $c \in \mathbb{F}$ 和任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}^m$，有 $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$。

列向量空间

定义 (m 维列向量空间)

数域 $\mathbb{F}$ 上全体 m 维列向量构成的集合 $\mathbb{F}^m$，连同定义在其上的加法 $(+)$ 运算和数乘 $(\cdot)$ 运算一起，被称为数域 $\mathbb{F}$ 上的 m 维列向量空间，记为 $(\mathbb{F}^m, +, \cdot)$。

- 一方面，第四章中关于列向量空间的所有理论都建基于列向量加法和数乘的 10 条性质
- 另一方面，加法和数乘的 10 条运算性质其实并不依赖于列向量的具体形式
- 问题：是否能摆脱列向量的具体形式，仅依赖于运算的性质建立一套抽象的代数系统以推广列向量空间理论？

运算的本质

列向量加法的本质：取 $\mathbb{F}^m$ 中两个元素 α, β，依特定规则将它们对应到 $\mathbb{F}^m$ 中的另一个列向量“$\alpha+\beta$”

定义

设 S 和 T 是非空集合，用 φ 表示一个从 S 中元素到 T 中元素的对应规则。若对 $\forall s \in S$，有且仅有唯一的 $t \in T$ 与之对应，则称 φ 是从 S 到 T 的映射。

- 从本质上说，列向量加法是从$\mathbb{F}^m \times \mathbb{F}^m$到$\mathbb{F}^m$的映射
- 类似地，列向量数乘是从$\mathbb{F} \times \mathbb{F}^m$到$\mathbb{F}^m$的映射

抽象加法

定义

设 V 是一个非空集合。定义 V 上的加法（记为$+$）为满足下面要求的运算法则：对任意 $\alpha, \beta \in V$，按该运算法则存在唯一的对应元素，记为$\alpha + \beta$，并且运算法则 $+$ 还满足

1. 封闭性：$\alpha + \beta \in V$；
2. 交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$，$\forall \alpha, \beta \in V$；
3. 结合律：$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$，$\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$；
4. 有零向量：存在 V 中某个元素，记为0，使得 $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$，$\forall \alpha \in V$；
5. 有负向量：对任意 $\alpha \in V$，存在 V 中元素 β 使得 $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0$。

抽象数乘

定义

设 V 为定义了加法 $+$ 法则的非空集合，$\mathbb{F}$ 为一个数域。V 和 $\mathbb{F}$ 上的数乘（记为 $\cdot$）为满足下面要求的运算法则：对任意 $c \in \mathbb{F}$ 和 $\alpha \in V$，按该运算法则存在唯一的对应元素，记为 $c \cdot \alpha$（一般简记为 $c\alpha$），并且数乘法则还满足

6. 封闭性：$c\alpha \in V$，$\forall c \in \mathbb{F}, \alpha \in V$；
7. 有数乘单位元：$1\alpha = \alpha$，$\forall \alpha \in V$；
8. 数乘与向量加法的分配律：$c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$，$\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in \mathbb{F}$；
9. 数字加法与数乘的分配律：$(c + d)\alpha = c\alpha + d\alpha$，$\forall c, d \in \mathbb{F}, \forall \alpha \in V$；
10. 数字乘法与数乘的结合律：$(cd)\alpha = c(d\alpha)$，$\forall c, d \in \mathbb{F}, \forall \alpha \in V$。

一般线性空间

定义

设有非空集合 V 和数域 $\mathbb{F}$，在 V 和 $\mathbb{F}$ 上定义了满足要求的加法运算 $(+)$ 和数乘运算 $(\cdot)$，则称三元组 $(V,+,\cdot)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间（又称向量空间），V 中元素称为向量。当加法和数乘运算在上下文中清楚时，我们将线性空间简记为 V。

- 满足前述 10 条性质的加法和数乘运算统称线性运算
- 注意：其他一些教材中通常说 8 条性质（未包含两个封闭性要求）

数域构成的线性空间实例

例

- 实数域 $\mathbb{R}$ 关于实数的加法和乘法构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间；
- 复数域 $\mathbb{C}$ 关于复数的加法和乘法构成 $\mathbb{C}$ 上的线性空间；
- 更一般地，任意数域 $\mathbb{F}$ 关于$\mathbb{F}$ 上的加法与乘法构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。

- 注意：实数域 $\mathbb{R}$ 关于复数的加法和乘法并不构成 $\mathbb{C}$ 上的线性空间

列向量空间和矩阵空间相关实例

例 (列向量空间的子空间)

设 V 为 $\mathbb{F}^m$ 的一个子空间，则 V 关于列向量的加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。

特别地，设 A 为数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m \times n$ 矩阵，线性方程组 $AX = 0$ 的解空间 $\{X \in \mathbb{F}^n \mid AX = 0\}$ 关于 n 维列向量的加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。

例 (矩阵空间)

数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 $m \times n$ 阶矩阵构成的集合，记为$\mathbb{F}^{m\times n}$，关于矩阵的加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。

多项式空间相关实例

例 (多项式空间)

数域 $\mathbb{F}$ 上以 x 为变元的所有一元多项式，记为 $\mathbb{F}[x]$，关于多项式的加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。

例 (有限次多项式空间)

数域 $\mathbb{F}$ 上以 x 为变元的所有次数不超过 d 的一元多项式，记为$\mathbb{F}_d[x]$，关于多项式的加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。

数学分析相关的实例

例 (数列空间)

所有收敛于 0 的实数列关于数列的加法和数乘构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

例 (连续函数空间)

设 $[a,b]$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的闭区间，所有在 $[a,b]$ 上连续的函数，记为 $C[a,b]$，关于函数的加法和数乘构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

例 (可微函数空间)

所有在 $[a,b]$ 上可微的函数，记为 $D[a,b]$，关于函数的加法和数乘构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

特殊运算的实例

例 (特殊运算构成的线性空间)

设 $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ 为所有正实数构成的集合，取 $\mathbb{R}$ 定义 V 上的加法与数乘：

1. 加法：$x \boxplus y := xy, \forall x, y \in V$；
2. 数乘：$c \boxdot x := x^c, \forall x \in V, c \in \mathbb{R}$。

V 关于上述加法和数乘构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

日常生活中的例子

- RGB 颜色空间
- 图像空间
- 大语言模型内部表示空间

加法性质

命题 (零向量的唯一性)

V 中存在唯一的零向量，通常记为0。

命题 (负向量的唯一性)

对于任意向量 $\alpha \in V$，V 中存在唯一的向量 $\beta \in V$ 使 $\alpha + \beta = 0$，记该负向量为$-\alpha := \beta$。

- 利用负向量的唯一性可以定义向量间的减法（$-$）：

$$\alpha - \beta := \alpha + (-\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V.$$

命题 (加法消去律)

设 $\alpha, \beta, \gamma \in V$，若 $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ 则 $\beta = \gamma$。

数乘性质

命题 (数字零的数乘)

$$0_{\mathbb{F}}\alpha = 0_V, \quad \forall \alpha \in V.$$

命题 (零向量的数乘)

$$c0_V = 0_V, \quad \forall c \in \mathbb{F}.$$

命题 (数字 -1 的数乘)

$$(-1)\alpha = -\alpha, \quad \forall \alpha \in V.$$

线性组合

定义

设 V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta \in V$ 以及常数 $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{F}$，称向量（或表达式）

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n,$$

为向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的一个线性组合，称 $c_1, \ldots, c_n$ 为这个线性组合的组合系数，或简称系数。

设向量 $\beta \in V$ 满足

$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n,$$

则称 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出/线性表示。

线性相关/无关

定义

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 中的向量组，若存在不全为零的数 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{F}$ 使得

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = 0,$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为线性相关。
否则，若唯一满足上述条件的数为 $c_1 = 0, c_2 = 0, \cdots, c_n = 0$，则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为线性无关。

测验：能否推广？

命题 (第 4 章命题)

设矩阵 A 的列向量组为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关的充要条件是齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解。

- 答：不能

定理 (第 4 章定理)

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其他向量线性表示。
等价地，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是其中任何一个向量都无法由其余向量线性表示。

- 答：能

测验：能否推广？

命题 (第 4 章命题)

设 m 阶方阵 A 可逆，则 m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n$ 线性无关。

- 答：不能

极大线性无关组

定义

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in V$ 的部分组（子集）$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 满足

1. $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关；
2. 将向量组中的任意向量添加到 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 中所得的 $r+1$ 个向量都线性相关，

则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组，简称为极大无关组。

定义 (另一等价定义)

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可以由部分组（子集）$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示，且表示方法唯一，则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组。

向量组的秩

定义

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大无关组所含向量个数称为该向量组的秩，记为 $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$。定义零向量组的秩为 0。

测验：能否推广？

命题 (第 4 章命题)

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\in\mathbb{F}^{m\times s}$。对 A 做行初等变换化为简化行阶梯形矩阵 B，设 B 的非零行中的主元所在列为 $j_1,\ldots,j_r\in[s]$，则 $\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_r}$ 为列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组。

- 答：不能

定理 (第 4 章定理)

若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t).$$

- 答：能

子空间

定义

设 $\emptyset \neq U \subseteq V$，若 U 对 V 上所定义的加法和数乘封闭，则称 U 是 V 的线性子空间，简称子空间。

定义

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$，称集合

$$\{c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}\}$$

为由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 生成的子空间，或称为向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的生成子空间，记作 $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$。

交空间与和空间

定义

设 V_1, V_2 是 V 的子空间，则 $V_1 \cap V_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V_1, \alpha \in V_2\}$ 是 V 的子空间，称为 V_1 与 V_2 的交空间。

定义

设 V_1, V_2 是 V 的子空间，则

$$V_1 + V_2 := \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \forall \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$$

是 V 的子空间，称为 V_1, V_2 的和空间。

测验：能否推广？

命题 (第 4 章命题)

设 V_1, V_2 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，则 $\langle V_1 \cup V_2 \rangle = V_1 + V_2$，即 $V_1 + V_2$ 是包含 $V_1 \cup V_2$ 的最小子空间。

- 答：能

线性空间的基与维数

定义

如果在线性空间 V 中存在 n 个向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 满足

1. $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性无关；
2. V 中的任意向量均可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性表示，

则称 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 为 V 的一个基。

定义

设 V 是一个线性空间。若 V 的基由 n 个向量组成，则称 V 为一个 n 维线性空间，称 n 为 V 的维数，记为 $\dim V = n$ 或 $\dim_{\mathbb{F}} V = n$。定义零空间的维数为 0。

测验：能否推广？

定理 (第 4 章定理)

设 V 为 $\mathbb{F}^m$ 的 n 维线性子空间，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in V$，则下列命题等价：

1. $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是 V 的基；
2. $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性无关，且 V 中任一向量可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性表示；
3. $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性无关，且 V 中任一向量加入 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 中后所得向量组线性相关；
4. V 中任一向量可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性表示，且表示法唯一；
5. $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性无关；
6. V 中任一向量可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性表示。

- 答：能

测验：能否推广？

定理 (第 4 章定理)

设 V 是 $\mathbb{F}^m$ 的 n 维线性子空间，且 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是 V 的一个基。若 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r \in V$（$r < n$）线性无关，则必可在 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 中取 $n - r$ 个向量与 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ 凑成 V 的一个基。

- 答：能

定理 (第 4 章定理)

设 V_1, V_2 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，则

$$\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2).$$

- 答：能

子空间的直和

定义

设 V_1 和 V_2 是线性空间 V 的子空间，若 $V_1 + V_2$ 中的任意向量 α 的分解方式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$$

是唯一的，则称 $V_1 + V_2$ 为直和（direct sum），记为 $V_1 \oplus V_2$。

测验：能否推广？

定理 (第 4 章定理)

设 V_1 和 V_2 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，V_1+V_2 是直和 $V_1\oplus V_2$ 的充要条件是 $V_1\cap V_2=\{0\}$。

- 答：能

命题 (第 4 章命题)

设 V_1 和 V_2 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，则下列命题等价

1. V_1+V_2 是直和 $V_1\oplus V_2$；
2. $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$；
3. V_1 的任意基和 V_2 的任意基都能凑成 V_1+V_2 的一个基。

- 答：能