第六章 一般线性空间与线性映射

$6.8 商空间与线性映射的结构 *

高代试验田 https://gdfzu.club

1 同余类

2 商空间及其维数

3 商空间与线性映射的结构

1 同余类

2 商空间及其维数

3 商空间与线性映射的结构

同余关系

定义

设 V 是一个线性空间，$V' \subseteq V$ 是 V 的一个子空间，若 $\alpha, \beta \in V$ 满足 $\alpha - \beta \in V'$，则我们称 α 与 β模 V' 同余，记为 $\alpha \sim_{V'} \beta$。

例

二维平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个 1 维子空间 L 是过原点的一条直线，平面上两点 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ 模 L 同余（$\alpha - \beta \in L$）在几何上有何含义？

- 答：$\alpha \sim_L \beta$ 表明 α, β 两点同在一条平行于 L 的直线上。

同余关系与等价关系

可以验证同余关系 $\sim_{V'}$ 满足：

- 自反性：$\alpha \sim_{V'} \alpha, \forall \alpha \in V$；
- 对称性：若 $\alpha \sim_{V'} \beta$ 则 $\beta \sim_{V'} \alpha$；
- 传递性：若 $\alpha \sim_{V'} \beta$ 且 $\beta \sim_{V'} \gamma$，则 $\alpha \sim_{V'} \gamma$。

因此，同余关系是等价关系。

同余类

在同余等价关系下的每一个等价类可写成如下形式。

定义

设 $\alpha \in V$，我们定义 V 的子集

$$\alpha + V' := \{\alpha + \beta \mid \beta \in V'\}$$

为 V 中模 V' 的同余类，α 称为该同余类的一个代表元。

例

设子空间 L 是 $\mathbb{R}^2$ 上过原点的一条直线，对于平面上一点 $\alpha \in \mathbb{R}^2$，模 L 的同余类 $\alpha + L$ 在几何上有何含义？

- 答：$\alpha + L$ 就是平面上过点 α 且与 L 平行的直线。

同余关系的性质

命题

1. $\alpha' + V' = \alpha + V'$ 当且仅当 $\alpha' \in \alpha + V'$，即在同一个同余类内部挑选任意代表元不改变同余类；
2. $\beta + V' \neq \alpha + V'$ 当且仅当 $(\beta + V') \cap (\alpha + V') = \emptyset$，即不同的同余类不相交。

1. 同余类
2. 商空间及其维数
3. 商空间与线性映射的结构

同余类的集合

- 设 V' 是 V 的子空间，V 中所有模 V' 同余类构成的集合，记为

$$V/V' := \{\alpha + V' \mid \alpha \in V\}.$$

例

设子空间 L 是 $\mathbb{R}^2$ 上过原点的一条直线，则 $\mathbb{R}^2/L$ 就是平面商所有与 L 平行的直线的集合。

同余类的加法和数乘

定义

设 V' 是数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的子空间。对任意两个模 V' 的同余类 $\alpha+V', \beta+V' \in V/V'$，定义**同余类的加法**为

$$(\alpha+V')+(\beta+V') := (\alpha+\beta)+V'.$$

对任意 $c \in \mathbb{F}$，定义**同余类的数乘**为

$$c(\alpha+V') := c\alpha+V'.$$

- 问题：当同余类选择不同代表元时，加法和数乘的定义是否能保持一致？

商空间

- 可以验证，同余类的加法和数乘满足线性空间定义中要求的 10 条运算性质

定理

设 V' 是数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 的子空间，则集合 V/V' 关于同余类的加法和数乘构成数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。我们称 V/V' 为 V 对 V' 的商空间。

商空间的维数

- 考虑从 V 到商空间 V/V' 的一个自然线性映射

$$\pi : V \to V/V', \alpha \mapsto \alpha + V'$$

- π 的核空间：$\operatorname{Ker}\pi = V'$
- π 的像空间：$\operatorname{Im}\pi = V/V'$
- 由线性映射基本定理得

定理

设 V' 是 V 的子空间，则商空间 V/V' 的维数为

$$\dim V/V' = \dim V - \dim V'.$$

1 同余类

2 商空间及其维数

3 商空间与线性映射的结构

关于线性映射与核空间的观察

- $\operatorname{Ker}\varphi$ 中的向量都被 φ 映射到 0
- φ 仅对 $\operatorname{Ker}\varphi$ 之外的向量有非平凡的作用
- 考虑 V 空间对核空间 $\operatorname{Ker}\varphi$ 的商空间 $V/\operatorname{Ker}\varphi$
- φ 作用在商空间中的同余类会有什么效果?

辅助映射

考虑一个从 φ 诱导出的，从 $V/\operatorname{Ker}\varphi$ 到 $\operatorname{Im}\varphi$ 的映射。

定义

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$，定义映射

$$\tilde{\varphi} : V/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi, \alpha + \operatorname{Ker}\varphi \mapsto \varphi(\alpha).$$

- 当同余类取不同代表元时，$\tilde{\varphi}$ 的定义是否一致？

$\widetilde{\varphi}$ 是同构映射

定理

$\widetilde{\varphi}$ 是从 $V/\operatorname{Ker}\varphi$ 到 $\operatorname{Im}\varphi$ 的同构映射，因而我们有

$$\dim V/\operatorname{Ker}\varphi = \dim\operatorname{Im}\varphi.$$

同构交换关系

设 π 是从 V 到 $V/\operatorname{Ker}\varphi$ 的自然映射

$$\pi : \alpha \mapsto \alpha + \operatorname{Ker}\varphi.$$

命题

给定线性映射 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ 和 π，$\widetilde{\varphi}$ 是满足下面关系的唯一同构映射

$$\varphi = \widetilde{\varphi}\pi.$$

从商空间看线性映射

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{Im}\varphi \\
& V/\mathrm{Ker}\varphi \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}
$$

- 商空间 $V/\mathrm{Ker}\,\varphi$ 将 V 划分成不相交的同余类 $\alpha+\mathrm{Ker}\,\varphi$;
- φ 将同一个同余类 $\alpha+\mathrm{Ker}\,\varphi$ 都唯一地映射到 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 中的向量 $\varphi(\alpha)$;
- 特别地，$0+\mathrm{Ker}\,\varphi$ 被映射为零向量。