第六章 一般线性空间与线性映射

$6.7 线性映射的像与核

高代试验田 https://gdfzu.club

1. 像空间与核空间
2. 线性映射基本定理

线性映射的像与核

定义

设 V 和 U 为两个线性空间，φ 为 V 到 U 的线性映射。对于 V 中向量 α，我们称 $\varphi(\alpha)$ 为α 在 φ 下的像。对于 U 中向量 β，我们称像为 β 的 V 中所有向量的集合为β 在 φ 下的原像，记为$\varphi^{-1}(\beta) := \{\alpha \in V \mid \varphi(\alpha) = \beta\}$。

定义

设 V 和 U 为两个线性空间，φ 为 V 到 U 的线性映射。称 V 中所有向量在 φ 下的像的集合为φ 的像，记作

$$\operatorname{Im}\varphi := \varphi(V) = \{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in V\} \subseteq U.$$

称 U 中零向量 0_U 在 φ 下的原像集合为线性映射 φ 的核，记作

$$\operatorname{Ker}\varphi := \varphi^{-1}(0_U) = \{\alpha \in V \mid \varphi(\alpha) = 0_U\}.$$

像空间与核空间

定理

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$，则 $\operatorname{Im}\varphi$ 是 U 的子空间，且 $\operatorname{Ker}\varphi$ 是 V 的子空间。

- 称 $\dim(\operatorname{Im}\varphi)$ 为线性映射 φ 的秩
- 称 $\dim(\operatorname{Ker}\varphi)$ 为线性映射 φ 的零度

例子

例

考虑 V 到 U 的零映射 $\varphi:\alpha\mapsto 0_U$，求 $\operatorname{Im}\varphi, \operatorname{Ker}\varphi$，以及零映射的秩 $\dim(\operatorname{Im}\varphi)$ 和零度 $\dim(\operatorname{Ker}\varphi)$。

例

考虑 n 维线性空间 V 上的恒等映射 id_V，求 $\operatorname{Im}\mathrm{id}_V, \operatorname{Ker}\mathrm{id}_V$，以及恒等映射的秩 $\dim\mathrm{id}_V$ 和零度 $\dim\operatorname{Ker}\mathrm{id}_V$。

例

考虑映射 $\varphi_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m, \alpha\mapsto A\alpha$，其中 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 求 $\operatorname{Im}\varphi_A, \operatorname{Ker}\varphi_A$，以及 φ_A 的秩和零度。

无穷维的例子

例

考虑求导映射 $D \in \mathcal{L}(D[a,b], D[a,b])$。对于任意 $f \in D[a,b]$ 有 $Df = f' \in D[a,b]$，求 $\operatorname{Im} D, \operatorname{Ker} D$，以及 D 的零度 $\dim \operatorname{Ker} D$。

核空间的一个简单应用

命题

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$，则 φ 是单射的充分必要条件是 $\operatorname{Ker} \varphi = 0$。

线性映射的秩与零度的关系

- 前述有限维线性空间上线性映射的像空间与核空间的例子都满足下述关系

$$\dim \mathrm{Im}\, \varphi + \dim \mathrm{Ker}\, \varphi = \dim\, V.$$

- 对于一般的线性映射，这个关系是否依然成立？

线性映射基本定理

定理 (线性映射基本定理)

设 V 为有限维线性空间，φ 是从 V 到线性空间 U 的线性映射，则 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 也是有限维空间，且满足

$$\dim \mathrm{Im}\,\varphi + \dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim V.$$

- 注意：$\mathrm{Im}\,\varphi + \mathrm{Ker}\,\varphi = V$ 未必成立
- 首先 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 是 U 的子空间而不是 V 的子空间，因此像空间与核空间未必能相加
- 即使在像空间与核空间可以相加的情况下，$\mathrm{Im}\,\varphi + \mathrm{Ker}\,\varphi = V$ 依然未必成立
- 思考题：举出具体的反例。

证法一：扩基法

证明概要

- 设 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r)$ 是 $\operatorname{Ker}\varphi$ 的基；
- 将其扩展为 V 的基 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r, \xi_{r+1}, \cdots, \xi_n)$；
- 证明 $\varphi(\xi_{r+1}), \varphi(\xi_{r+2}), \cdots, \varphi(\xi_n)$ 是 $\operatorname{Im}\varphi$ 的基。 $\square$

证法二：基于同构关系的证明

- 设 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 为线性空间 V 的基，$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 为线性空 U 的基。设 $\varphi\in\mathcal{L}(V,U)$ 满足
$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)A,$$
其中 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$。
- 记 φ_A 为线性映射
$$\varphi_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m,(a_1,a_2,\cdots,a_n)^\top\mapsto A(a_1,a_2,\cdots,a_n)^\top.$$
- 基本思路：利用 φ_A 与 φ 的关系证明线性映射基本定理。

证法二过程

引理

设 φ 为线性空间 V 到 U 的同构映射，$V' \subseteq V$ 是 V 的子空间，则将 φ 的作用范围限制为 V' 之后，所得的映射 $\varphi_{V'}: V' \to \varphi(V'), \alpha \in V' \mapsto \varphi(\alpha)$ 依然是 V' 到 $\varphi(V')$ 的同构映射。

命题

$\mathrm{Im}\,\varphi$ 与 $\mathrm{Im}\,\varphi_A$ 同构且 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 与 $\mathrm{Ker}\,\varphi_A$ 同构。

命题

$\dim \mathrm{Im}\,\varphi_A = r(A)$ 且 $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi_A = \dim \mathrm{Ker}\,A = n - r(A)$。

- 综上，$\dim \mathrm{Im}\,\varphi + \dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim\, V$

线性映射基本定理的简单推论

推论

设 V 和 U 是有限维线性空间，且 $\dim V > \dim U$，则任意从 V 到 U 的线性映射都不是单射。

推论

设 V 和 U 是有限维线性空间，且 $\dim V < \dim U$，则任意从 V 到 U 的线性映射都不是满射。

两种证明方法的更多应用

命题

设 V, U 是有限维线性空间，若 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$，则存在 $\psi \in \mathcal{L}(U, V)$ 使得

$$\varphi\psi\varphi = \varphi \quad \text{且} \quad \psi\varphi\psi = \psi.$$

线性映射视角下的秩不等式

例

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

其中，$A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}$。

- 考虑线性映射 $\varphi_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m, \alpha \mapsto A\alpha$，$\varphi_B : \mathbb{F}^p \to \mathbb{F}^n, \beta \mapsto B\beta$，以及 $\varphi_{AB} : \mathbb{F}^p \to \mathbb{F}^m, \beta \mapsto AB\beta$
- 利用这三个线性映射证明上述秩不等式。