第六章 一般线性空间与线性映射

$6.6 线性映射的表示矩阵

高代试验田 https://gdfzu.club

线性映射与基向量

- 线性映射的行为由其在基向量上的行为唯一决定

命题

设 V 和 U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，$(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 是 V 的基。对于 U 中的任意 n 个向量 $\beta_1,\ldots,\beta_n$，存在唯一的从 V 到 U 的线性映射 $\varphi\in\mathcal{L}(V,U)$ 满足

$$\varphi(\xi_i)=\beta_i,\quad \forall i=1,2,\ldots,n.$$

线性映射的表示矩阵

定义

设 V, U 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是 V 的一个基，$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)$ 是 U 的一个基，设

$$\begin{cases} \varphi(\xi_1) = a_{11}\eta_1 + a_{21}\eta_2 + \cdots + a_{m1}\eta_m \\ \varphi(\xi_2) = a_{12}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \cdots + a_{m2}\eta_m \\ \qquad \vdots \\ \varphi(\xi_n) = a_{1n}\eta_1 + a_{2n}\eta_2 + \cdots + a_{mn}\eta_m \end{cases},$$

形式上记为 $\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)A$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \in \mathbb{F}^{m\times n}$$

被称为 φ 在 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 与 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)$ 下的矩阵，或称**表示矩阵**

表示矩阵的唯一性

- 表示矩阵 A 的第 j 列是 $\varphi(\xi_j)$ 在基 $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ 下的坐标
- 由坐标的唯一性，φ 的表示矩阵 A 被唯一确定
- 另一方面，给定源空间和目标空间的两个基，以及矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$（即确定了源空间基向量在 φ 下像的坐标），则线性映射 φ 被唯一确定

例子

例

设 V_1, V_2 为线性空间 V 的的子空间，且 $V = V_1 \oplus V_2$。考虑从 V 到 V_1 的投影映射：

$$\varphi : V \to V_1, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \mapsto \alpha_1,$$

其中 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$ 是将 α 分解为 V_1 和 V_2 中向量和的唯一方式。

又设 $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ 为 V_1 的基，$(\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ 为 V_2 的基，求 φ 在 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 和 $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ 下的矩阵。

表示矩阵与坐标

命题

设 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$、$(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ 分别为线性空间 V 和 U 的基，又设线性映射 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 和 $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ 下的表示矩阵为 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$。
若 $\alpha \in V$ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标为 $x \in \mathbb{F}^n$，则 $\varphi(\alpha)$ 在基 $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ 下的坐标为 Ax。

例

求线性映射 $\varphi : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^2, (x, y, z)^T \mapsto (x + y, 2y - z)^T$ 在基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 和基 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2')$ 下的表示矩阵 1，并求 $\varphi((3, 2, -1)^T)$ 在 $(\varepsilon_1', \varepsilon_2')$ 下的坐标。

线性运算下的表示矩阵

引理

设 V 和 U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，$(\xi_1, \ldots, \xi_n)$、$(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ 分别为 V 和 U 的基，又设线性映射 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V, U)$ 在的表示矩阵分别为 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$，则

- $\varphi + \psi$ 的表示矩阵为 $A + B$;
- 对于任意 $c \in \mathbb{F}$，$c\varphi$ 的表示矩阵为 cA。

- 上述引理表明，从线性映射到表示矩阵的映射可以保持线性映射的加法和数乘运算

线性映射空间与矩阵空间同构

定理

设 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$、$(\eta_1,\ldots,\eta_m)$ 分别为线性空间 V 和 U 的基。令 $\Theta:\mathcal{L}(V,U)\to\mathbb{F}^{m\times n},\varphi\mapsto A$ 为线性映射 φ 到其在 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 与 $(\eta_1,\ldots,\eta_m)$ 下的表示矩阵 A 的映射，则 Θ 是同构映射。因此，线性映射空间 $\mathcal{L}(V,U)$ 与矩阵空间 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 同构。

- 由于线性映射空间与表示矩阵空间同构，关于线性映射的许多线性代数性质的讨论可以等价地转化为对我们较为熟悉的矩阵的讨论
- 这是一种常见的证明策略

交换关系视角下的同构

设线性映射 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 和 $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ 下的表示矩阵为 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，我们构造下列几个映射：

- $\sigma_V : V \to \mathbb{F}^n, \alpha \mapsto (a_1, \ldots, a_n)^\top$ 为将向量 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i\xi_i \in V$ 映射到其在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下坐标的映射；
- $\sigma_U : U \to \mathbb{F}^m, \beta \mapsto (b_1, \ldots, b_m)^\top$ 为将向量 $\beta = \sum_{j=1}^m b_j\eta_j \in V$ 映射到其在基 $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ 下坐标的映射；
- $\varphi_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m, x \mapsto Ax$ 为基于矩阵 A 的从 n 维列向量到 m 维列向量的映射。

交换关系视角下的同构

命题

$$\varphi = \sigma_U^{-1} \varphi_A \sigma_V.$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, shift right, swap, "\sigma_V"] & U \arrow[d, shift right, swap, "\sigma_U"] \\
\mathbb{F}^n \arrow[r, swap, "\varphi_A"] \arrow[u, shift right, swap, "\sigma_V^{-1}"] & \mathbb{F}^m \arrow[u, shift right, swap, "\sigma_U^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

图 1: 同构交换关系图

表示矩阵与相抵关系

定理

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n'$ 是 V 的两组基，且

$$(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n') = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)P.$$

又设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$ 和 $\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m'$ 是 U 的两组基，且

$$(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m') = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)Q.$$

设线性映射 $\varphi \in \mathcal{L}(V,U)$ 满足

$$\begin{aligned}\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) &= (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)A_{m\times n}\\ \varphi(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n') &= (\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m')B_{m\times n}\end{aligned}$$

则 $B = Q^{-1}AP$，即 A 与 B 相抵。
反之，若 A 与 B 相抵，则 A,B 是同一个线性映射在不同基下的矩阵。

例子

例

在次数不超过 2 的多项式线性空间 $\mathbb{F}_2[x]$ 中，考虑微分算子 $D: p(x) \mapsto p'(x)$。

1. 求 D 在基 $(1, x, x^2)$ 和 $(1, x, x^2)$ 下的矩阵 A。
2. 求 D 在基 $(1, x+1, (x+1)^2)$ 和 $(1, x+1, (x+1)^2)$ 下的矩阵 B。