第六章 一般线性空间与线性映射

\$6.5 同构映射与线性空间同构

高代试验田 https://gdfzu.club

问题

经过线性映射（如投影映射）作用后，我们可能丢失原空间的一些信息。是否存在不丢失信息的线性映射呢？

同构映射的定义

定义

设 V 和 U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的两个线性空间，若存在映射 $\varphi : V \to U$ 满足

1. φ 是双射，
2. φ 是线性映射，

则称 φ 为 V 到 U 的同构映射。

例

设 V 为 n 维线性空间，$(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 是 V 的一个基。证明：基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标映射是从线性空间 V 到线性空间 $\mathbb{F}^n$ 的同构映射。

同构映射下代数性质的等价性

命题

设 φ 为 V 到 U 的同构映射，则向量 $\alpha \in V$ 在 V 中可由向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ 线性表出当且仅当 $\varphi(\alpha)$ 在 U 中可由向量组 $\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)$ 线性表出。

命题

设 φ 为 V 到 U 的同构映射，则向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ 在 V 中线性相关当且仅当 $\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)$ 在 U 中线性相关。

命题

设 V 和 U 为两个线性空间，$V_1, V_2 \subseteq V$ 分别为 V 的两个子空间，若 $\varphi: V \to U$ 是同构映射，则 $V_1 \oplus V_2$ 当且仅当 $\varphi(V_1) \oplus \varphi(V_2)$。

- 在三个证明中，并未用到 φ 是双射，而仅须其为单射

同构映射下的基等价

命题

设 V 和 U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的两个线性空间，若 $\varphi : V \to U$ 是同构映射，则向量组 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V$ 是 V 的基当且仅当 $(\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n))$ 是 U 的基。

推论

设 φ 为 V 到 U 的同构映射，$V' \subseteq V$ 是 V 的任意子空间，则 $\dim V' = \dim \varphi(V')$，且 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 是 V' 的基当且仅当 $(\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n))$ 是 U 的子空间 $\varphi(V')$ 的基。

线性空间同构关系

定义

设 V 和 U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的两个线性空间，若存在 V 到 U 的同构映射，则称线性空间 V 与 U **同构**，记为 $V \cong U$。

可以验证线性空间的同构关系是一个等价关系，满足：

1. 自反性：$V \cong V$；
2. 对称性：若 $V \cong U$，则 $U \cong V$；
3. 传递性：若 $V \cong U$ 且 $U \cong W$，则 $V \cong W$。

线性同构基本定理

定理

设 V 和 U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的两个有限维线性空间，V 与 U 同构当且仅当 V 与 U 有相同的维数。

推论

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，则 V 与 n 维列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 同构。

- 对任何有限维线性空间的讨论都可转化为对相同维数的列向量空间的讨论
- 坐标映射给出了具体的转化方式