第六章 一般线性空间与线性映射

$6.4 线性映射的运算

高代试验田 https://gdfzu.club

1. 线性映射的加法与数乘
2. 线性映射的乘法

加法与数乘

定义

设 V 和 U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的两个线性空间，对于任意 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V, U)$ 以及 $c \in \mathbb{F}$，定义线性映射的加法和数乘运算如下

- 加法 $\varphi + \psi$：$(\varphi + \psi)(\alpha) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \forall \alpha \in V$；
- 数乘 $c\varphi$：$(c\varphi)(\alpha) = c\varphi(\alpha), \forall \alpha \in V$。

线性映射构成的线性空间

命题 (加法与数乘的封闭性)

设 φ, ψ 是从 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 到 U 的线性映射，$c \in \mathbb{F}$，则

$$\varphi + \psi \in \mathcal{L}(V, U) \quad 且 \quad c\varphi \in \mathcal{L}(V, U).$$

定理

数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 到线性空间 U 的全体线性映射集合 $\mathcal{L}(V, U)$ 关于线性映射的加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。

1. 线性映射的加法与数乘
2. 线性映射的乘法

乘法

定义

设 U, V, W 为线性空间，给定线性映射 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ 和 $\psi \in \mathcal{L}(U, W)$，$\psi$ 与 φ 的乘积，记为 $\psi\varphi$，定义如下

$$\psi\varphi(\alpha) = \psi(\varphi(\alpha)), \quad \forall \alpha \in V.$$

- 线性映射相乘本质上是两个线性映射的合成
- φ 的目标空间和 ψ 的源空间要匹配才能相乘
- 线性变换可以随意相乘

线性映射相乘仍得线性映射

命题

设 U, V, W 为数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$，$\psi \in \mathcal{L}(U, W)$，则 $\psi\varphi$ 是从 V 到 W 的线性映射。

乘法相关性质

命题 (乘法结合律)

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V_1, V_2), \psi \in \mathcal{L}(V_2, V_3), \delta \in \mathcal{L}(V_3, V_4)$ 为线性映射，则

$$\delta(\psi\varphi) = (\delta\psi)\varphi.$$

命题 (乘法单位元)

设 $\mathrm{id}_V \in \mathcal{L}(V, V)$ 和 $\mathrm{id}_U \in \mathcal{L}(U, U)$ 分别为线性空间 V 和 U 上的恒等变换，对于任意为从 V 到 U 的线性映射 $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$，有

$$\varphi \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_U \varphi = \varphi,$$

即 id_V 和 id_U 分别为右乘和左乘单位元。

乘法相关性质

命题 (线性映射乘法与加法的分配律)

设 $\psi, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(U, W)$，$\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(V, U)$，则

$$(\psi_1 + \psi_2)\varphi = \psi_1\varphi + \psi_2\varphi \quad \text{且} \quad \psi(\varphi_1 + \varphi_2) = \psi\varphi_1 + \psi\varphi_2.$$

线性映射相乘特例

例

设有矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}$，定义线性映射 $\varphi : \mathbb{F}^p \to \mathbb{F}^n, \alpha \mapsto B\alpha$ 和 $\psi : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m, \beta \mapsto A\beta$，证明：

$$\psi\varphi(\alpha) = AB\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}^p,$$

即 ψ 与 φ 相乘对应了 A 与 B 的矩阵相乘。

- 这是线性映射乘法的重要例子，后续我们将看到对于有限维线性空间来说，线性映射乘法等价于矩阵乘法

线性映射乘法不满足交换律

例 (线性映射乘法的非交换性)

考虑线性映射 $\varphi:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x], p(x)\mapsto xp(x)$ 和 $D:D[a,b]\to\mathbb{R}, f\mapsto f'$，证明：$D\varphi\neq\varphi D$。

- 除了不满足交换律以外，类似于矩阵在乘法下未必可逆，线性映射在乘法下的逆元也未必存在