第六章 一般线性空间与线性映射

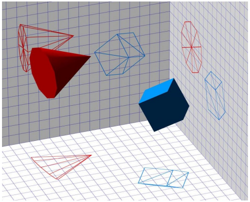
$6.3 线性映射

高代试验田 https://gdfzu.club

保持线性物体的对应关系

问题

如何在 2 维平面上展示 3 维物体？



要求：3 维物体中的任意一直线段对应于 2 维平面上的直线段。

- 从代数学的角度来说，在上述例子中我们希望找到保持线性运算关系的映射

1 引子

2 线性映射

3 线性映射的性质

线性映射的定义

定义

设 V 和 U 为两个线性空间，$\varphi: V \to U$ 为集合 V 到 U 的一个映射。若 φ 满足下列性质

1. 保持加法结构：$\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta), \forall \alpha, \beta \in V$;
2. 保持数乘结构：$\varphi(c\alpha) = c\varphi(\alpha), \forall c \in \mathbb{R}, \alpha \in V$;

则称 φ 为 V 到 U 的一个线性映射。V 到 U 的所有线性映射构成的集合记为 $\mathcal{L}(V, U)$。

当 $U = V$ 时，$\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ 也被称为线性变换（或线性算子）

例子

例 (零映射)

设 V 为任一线性空间，验证从 V 到 V 的映射 $\varphi : \alpha \mapsto 0$ 是一个线性映射。我们称该线性映射为零映射。

例 (恒等映射)

设 V 为任一线性空间，验证从 V 到 V 的恒等映射/变换$\mathrm{id}_V : \alpha \mapsto \alpha$ 是线性映射/变换。

例 (投影映射)

验证 $\mathbb{F}^2$ 到 $\mathbb{F}$ 的映射 $\varphi : (x, y)^\top \mapsto x$ 是线性映射。

例子

例

一元多项式集合 $\mathbb{F}[x]$ 到自身的映射
$\varphi : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x], p(x) \mapsto xp(x)$ 是线性映射。

例 (求导运算)

考虑区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上的可微函数空间 $D[a,b]$ 到自身的映射 $D : f \mapsto f'$，其中 f' 是 f 的导函数。求导运算 D 是线性变换，也称为微分算子。

例 (积分运算)

考虑区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数空间 $C[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 $T : f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$。积分运算 T 是线性映射。

- V 到 $\mathbb{F}$ 的线性映射 $\varphi \in \mathcal{L}(V,\mathbb{F})$ 也被称为线性函数

例子

例 (矩阵乘以列向量)

给定矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，定义从 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的映射 $\varphi_A : \alpha \mapsto A\alpha$ 是线性映射。

- 后续我们将看到任何有限维线性空间上的线性映射都能表示成上述形式

线性映射的判定

命题

设 $\varphi: V \to U$ 为线性空间 V 到 U 的一个映射。φ 是线性映射当且仅当，对于任意 $\alpha, \beta \in V$ 以及 $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$ 有

$$\varphi(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1\varphi(\alpha) + c_2\varphi(\beta).$$

推论

φ 是线性映射当且仅当，对于任意正整数 n 和 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ 以及 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ 有

$$\varphi(c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n) = c_1\varphi(\alpha_1) + \cdots + c_n\varphi(\alpha_n).$$

保零向量

命题

设 V 和 U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的两个线性空间，若映射 $\varphi : V \to U$ 是线性映射，则

$$\varphi(0_V) = 0_U,$$

其中 0_V 为 V 空间中的零向量，0_U 为 U 空间中的零向量。

单射线性映射的判定

命题

设 V 和 U 为数域 $\mathbb{F}$ 上的两个线性空间，$\varphi : V \to U$ 是线性映射，则 φ 是单射的充要条件是：若 $\varphi(\alpha) = 0_U$ 则 $\alpha = 0_V$。

保线性表出关系和线性相关性

命题

设 φ 为线性空间 V 到 U 的线性映射，若向量 $\alpha \in V$ 在 V 中可由向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ 线性表出，则 $\varphi(\alpha)$ 在 U 中也可由向量组 $\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)$ 线性表出。

命题

设 φ 为线性空间 V 到 U 的线性映射。若 V 中向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ 线性相关，则 $\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)$ 在 U 中也线性相关。

例

考虑线性映射 $\varphi : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}, (x, y)^T \mapsto x$，判断 $\mathbb{F}^2$ 中两个线性无关的向量 $(1, 0)^\top, (0, 1)^\top$ 在 φ 下的像是否线性无关？

保子空间

命题

设 φ 为线性空间 V 到 U 的线性映射。若 $V' \subseteq V$ 是 V 的子空间，则 $\varphi(V')$ 是 U 的子空间。