第六章 一般线性空间与线性映射

$6.2 坐标与基变换

高代试验田 https://gdfzu.club

线性空间中对象的表示

问题:

- 在日常生活中，我们如何定位一个物体？
- 在抽象的线性空间中，我们如何“定位”一个向量？

向量坐标的定义

定义

设 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是线性空间 V 的一个基，任意向量 $\alpha \in V$ 可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 唯一地线性表示为

$$\alpha = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_n\xi_n,$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{F}$。将 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^\top$ 称为 α 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的坐标，形式上记为

$$\alpha = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

- 向量在一个基下的坐标具有唯一性。

例子

例

在 $\mathbb{R}^3$ 中取 $((1,0,0)^\top,(0,1,0)^\top,(0,0,1)^\top)$ 和 $((1,0,0)^\top,(1,1,0)^\top,(1,1,1)^\top)$ 分别作为两个基，求向量 $(x,y,z)^\top\in\mathbb{R}^3$ 在上述两个基下的坐标。

例

设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{2\times 2}$

- 求 A 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的坐标；
- 求 A 在 $E_{11},E_{12},E_{22},E_{21}$ 下的坐标；
- 求 A 在 $E_{11},E_{11}+E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的坐标。

- 向量的坐标依赖于基。在不同的基下，坐标不同。

映射的定义

定义

- 设 S, T 为非空集合，用 φ 表示一个从 S 到 T 的对应法则。若对任意 $s \in S$，都存在 T 中唯一的元素 $t \in T$ 与之对应，则称 φ 为 S 到 T 的映射，记为 $\varphi : S \to T$。
- 用 $t = \varphi(s)$ 或 $\varphi : s \mapsto t$ 表示在映射 φ 下 t 与 s 相对应。称 t 为 s 在 φ 下的像，s 为 t 的原像。
- 当取遍 S 中所有元素 s 时，所有像的集合记为

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(S) = \{\varphi(s) \mid s \in S\}.$$

元素 $t \in T$ 的原像集合记为

$$\varphi^{-1}(t) = \{s \in S \mid \varphi(s) = t\}.$$

特殊映射

定义

设有非空集合 S, T 及映射 $\varphi : S \to T$。

- (单射)：若对于任意 $s_1 \neq s_2 \in S$ 有 $\varphi(s_1) \neq \varphi(s_2)$，则称 φ 为单射。等价说法：对于任意 $s_1, s_2 \in S$，若 $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$ 则 $s_1 = s_2$。
- (满射)：若对于任意 $t \in T$ 都存在 $s \in S$ 使得 $t = \varphi(s)$，则称 φ 为满射。
- 若 φ 既是单射又是满射，则称 φ 为双射，也称一一映射。

坐标映射

命题

设 $\varphi: V \to \mathbb{F}^n$ 为从 n 维线性空间 V 到列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 的映射，具体定义为

$$\varphi(\alpha) = (c_1, \ldots, c_n)^T, \quad \forall \alpha \in V,$$

其中 $(c_1, \ldots, c_n)^T$ 为 α 在基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标。则映射 φ 是双射。

保持线性运算

定理

设 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 的一组基，
$\varphi : V \to \mathbb{F}^n$ 为从 V 中向量到其在 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下坐标的映射，
则 φ 满足如下性质：

1. 保持加法运算：$\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, $\forall \alpha, \beta \in V$；
2. 保持数乘运算：$\varphi(c\alpha) = c\varphi(\alpha)$, $\forall c \in \mathbb{F}, \alpha \in V$。

- 加法和数乘运算统称线性运算

坐标与线性相关/无关性

- 由于坐标映射保持线性运算，有限维线性空间中与线性代数有关的讨论都可以等价地转化到列向量空间中进行

推论

设 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，$\alpha_i \in V, i \in [m]$ 是 V 中的 m 个向量，$(c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{ni})^T$ 为 α_i 在 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 下的坐标。则向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是它们的坐标向量组 $(c_{11}, \ldots, c_{n1})^T, \ldots, (c_{m1}, \ldots, c_{mn})^T$ 线性无关。

过渡矩阵

定义

设 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 和 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是线性空间 V 的两个基，若

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \cdots + a_{n1}\xi_n \\ \qquad\vdots \\ \eta_n = a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n \end{cases},$$

即 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A$，则称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 到 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵。

过渡矩阵与可逆性

命题

设 T 为从线性空间 V 的基 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 到基 $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ 的过渡矩阵，则 T 为可逆矩阵。

命题

设 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个可逆矩阵，则由 $(\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)T$ 所定义的 $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ 也是 V 的基。

过渡矩阵的传递关系

命题

设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ 和 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是线性空间 V 的三个基，它们满足

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A$$
$$(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B$$

则

$$(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)(AB).$$

推论

设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 和 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是线性空间 V 的两个基，它们满足 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A$，$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B$ 则 A,B 可逆且 $A=B^{-1}$。

基变换下的坐标变换

定理

设线性空间 V 的基 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 到 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 的过渡矩阵为 T，若向量 $\alpha\in V$ 在 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 下的坐标是 x，在 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 下的坐标为 y，则 $x=Ay$。

- 坐标运算的“结合律”：
  $\alpha=((\xi_1,\ldots,\xi_n)T)y=(\xi_1,\ldots,\xi_n)(Ty)$

例

设

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix},$$

求 $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 在基 (A_1,A_2,A_3,A_4) 下的坐标。

过渡矩阵的“传递性”

推论

设 $(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，$(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ 和 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 是线性空间 V 的三个基，它们满足

$$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)A,\quad (\zeta_1,\cdots,\zeta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)B.$$

则 $(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)(AB)$。

例

下面的两个向量组都能构成 $\mathbb{F}^3$ 的基：
$\xi_1=(1,0,-1)^T,\xi_2=(2,1,1)^T,\xi_3=(1,1,1)^T$,
$\eta_1=(1,2,1)^T,\eta_2=(1,2,0)^T,\eta_3=(1,0,0)^T$。
求从基 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 到基 (η_1,η_2,η_3) 的过渡矩阵。