§5.3 标准正交基与 Gram-Schmidt 正交化过程

高等代数 https://gdfzu.club

目录

正交向量组

- $\mathbb{R}^3$ **中常用的基：** $i=(1,0,0)^T$、$j=(0,1,0)^T$、$k=(0,0,1)^T$

正交向量组

- $\mathbb{R}^3$ **中常用的基：** $i=(1,0,0)^T$、$j=(0,1,0)^T$、$k=(0,0,1)^T$
- **正交向量组：任意两个向量均正交的向量组**

正交向量组

- $\mathbb{R}^3$ **中常用的基：** $i=(1,0,0)^T$、$j=(0,1,0)^T$、$k=(0,0,1)^T$
- **正交向量组：任意两个向量均正交的向量组**

例 1.1

设 $\alpha_1=(2,1,-1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,-1,1)^T$。可以验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个正交向量组。

正交向量组

- $\mathbb{R}^3$ **中常用的基**：$i=(1,0,0)^T$、$j=(0,1,0)^T$、$k=(0,0,1)^T$
- **正交向量组：任意两个向量均正交的向量组**

例 1.1

设 $\alpha_1=(2,1,-1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,-1,1)^T$。可以验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个正交向量组。

定理 1.2

若 $\alpha_1,\dots,\alpha_t$ 是一个正交向量组，且没有 0 向量，则 $\alpha_1,\dots,\alpha_t$ 线性无关。

正交基

- 正交基：正交向量组构成的基

正交基

- **正交基：正交向量组构成的基**

定理 1.3

设 $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间 V 的一组正交基，对 $\forall \beta \in V$，记

$$\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_t\alpha_t,$$

则

$$c_j = \frac{\beta \cdot \alpha_j}{\alpha_j \cdot \alpha_j}, \quad j = 1, \dots, t.$$

标准正交基

定义 1.4

若 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ 是一个正交向量组，且对每一个向量 $\alpha_j (j = 1, \ldots, t)$，

$$\alpha_j \cdot \alpha_j = \|\alpha_j\|^2 = 1,$$

则称 $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ 是一个标准正交向量组。称 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ 是 V 的一个标准正交基，其中

$$V = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_t \rangle.$$

标准正交基

定义 1.4

若 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_t$ 是一个正交向量组，且对每一个向量 $\alpha_j(j=1,\ldots,t)$，

$$\alpha_j\cdot\alpha_j=\|\alpha_j\|^2=1,$$

则称 $\alpha_1,\ldots,\alpha_t$ 是一个标准正交向量组。称 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_t)$ 是 V 的一个标准正交基，其中

$$V=\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_t\rangle.$$

定理 1.5

设 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_t)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间 V 的一组标准正交基，对 $\forall\beta\in V$，记

$$\beta=c_1\alpha_1+\cdots+c_t\alpha_t,$$

则

$$c_j=\beta\cdot\alpha_j,\quad j=1,\ldots,t.$$

标准正交基的矩阵

- 对任意的 $i, j = 1, \ldots, t$,

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

标准正交基的矩阵

- 对任意的 $i, j = 1, \ldots, t$,

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

- 记 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$，则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ 是一个标准正交向量组等价于

$$A^T A = E_t.$$

标准正交基的矩阵

- 对任意的 $i, j = 1, \ldots, t$,

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$$

- 记 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$，则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ 是一个标准正交向量组等价于

$$A^T A = E_t.$$

- $AA^T = ?$

目录

投影

- $\mathrm{Proj}_{\alpha}(\beta)$：向量 β 在向量 α 上的投影

投影

- $\mathrm{Proj}_\alpha(\beta)$：向量 β 在向量 α 上的投影

命题 2.1

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，且 $\alpha \neq 0$，则

$$\mathrm{Proj}_\alpha(\beta) = \frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha}\alpha.$$

特别地，若 $\|\alpha\| = 1$，则

$$\mathrm{Proj}_\alpha(\beta) = (\beta \cdot \alpha)\alpha = (\alpha\alpha^T)\beta.$$

正交向量的构造

定理 2.2

对任意非 0 的同维列向量 α 和 β,

$$\alpha \perp (\beta - \mathrm{Proj}_{\alpha}(\beta)).$$

正交向量的构造

定理 2.2

对任意非 *0* 的同维列向量 α 和 β,

$$\alpha \perp (\beta - \mathrm{Proj}_{\alpha}(\beta)).$$

定理 2.3

设 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间 V 的一组标准正交基，记 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$，则对 $\forall \beta \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Proj}_V(\beta) &= \mathrm{Proj}_{\alpha_1}(\beta) + \cdots + \mathrm{Proj}_{\alpha_t}(\beta) \\ &= (\beta \cdot \alpha_1)\alpha_1 + \cdots + (\beta \cdot \alpha_t)\alpha_t, \\ &= AA^T\beta, \end{aligned}$$

且

$$(\beta - \mathrm{Proj}_V(\beta)) \perp V.$$

投影矩阵

- 记 $P = AA^T$，其中 A 的列向量组是一组标准正交基，则

$$P^2 = (AA^T)^2 = A(A^TA)A^T = AA^T = P.$$

投影矩阵

- 记 $P = AA^T$，其中 A 的列向量组是一组标准正交基，则

$$P^2 = (AA^T)^2 = A(A^TA)A^T = AA^T = P.$$

- 投影矩阵：满足条件 $P^2 = P$ 的方阵 P

投影矩阵

- 记 $P = AA^T$，其中 A 的列向量组是一组标准正交基，则

$$P^2 = (AA^T)^2 = A(A^T A)A^T = AA^T = P.$$

- 投影矩阵：满足条件 $P^2 = P$ 的方阵 P

- 正交投影矩阵：进一步满足 $P^T = P$ 的投影矩阵 P

目录

算例

例 3.1

取 $\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(-2,0,1)^T$，记 $V=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$。构造 V 的一组标准正交基。

算例

例 3.1

取 $\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(-2,0,1)^T$，记 $V=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$。构造 V 的一组标准正交基。

例 3.2

设 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1,1)^T$，$\alpha_3=(0,0,1,1)^T$。构造 $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$ 的一组标准正交基。

Gram-Schmidt 标准正交化过程

定理 3.3

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个线性无关向量组，则必存在标准正交向量组 $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$，使得对于任意的 $r(1 \leq r \leq s)$，总有

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_r \rangle = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_r \rangle.$$

Gram-Schmidt 标准正交化过程

定理 3.3

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个线性无关向量组，则必存在标准正交向量组 $\gamma_1, \dots, \gamma_s$，使得对于任意的 $r(1 \le r \le s)$，总有

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_r \rangle.$$

- 思考：线性无关性的作用

内积空间的扩基定理

推论 3.4

$\mathbb{R}^n$ 的任意非 0 子空间必有标准正交基。

内积空间的扩基定理

推论 3.4

$\mathbb{R}^n$ 的任意非 0 子空间必有标准正交基。

推论 3.5

在 $\mathbb{R}^n$ 的任意非 0 子空间 V 中，任意标准正交向量组都可扩为 V 的标准正交基。

目录

QR 分解

定理 4.1

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是一个列满秩矩阵（即 $m \geq n$ 且 $r(A) = n$），则存在一个矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和一个上三角矩阵 $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得

$$A = QR, \quad Q^T Q = E_n.$$

算例

例 4.2

求矩阵的 QR 分解：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

算例

例 4.2

求矩阵的 QR 分解:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 4.3

设 $A_{m\times n}$ 是一个列满秩矩阵，$\beta \in \mathbb{R}^m$，则 $AX = \beta$ 有唯一的最小二乘解 $X_0 = R^{-1}Q^T\beta$，其中 $A = QR$ 是 A 的 QR 分解。