§5.2 正交投影与最小二乘解

高等代数 https://gdfzu.club

目录

内积空间中的正交

定义 1.1

若两个 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 α 和 β 满足

$$\alpha \cdot \beta = 0,$$

则称 α 和 β正交，记做 $\alpha \perp \beta$。

内积空间中的正交

定义 1.1

若两个 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 α 和 β 满足

$$\alpha \cdot \beta = 0,$$

则称 α 和 β正交，记做 $\alpha \perp \beta$。

- 0 向量与其它向量都正交。

内积空间中的正交

定义 1.1

若两个 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 α 和 β 满足

$$\alpha \cdot \beta = 0,$$

则称 α 和 β正交，记做 $\alpha \perp \beta$。

- 0 **向量与其它向量都正交。**
- **向量** $\alpha = (x, y, 0)^T$ **与** $\beta = (0, 0, z)^T$ **正交。**

内积空间中的正交

定义 1.1

若两个 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 α 和 β 满足

$$\alpha \cdot \beta = 0,$$

则称 α 和 β正交，记做 $\alpha \perp \beta$。

- 0 向量与其它向量都正交。
- 向量 $\alpha = (x, y, 0)^T$ 与 $\beta = (0, 0, z)^T$ 正交。
- $i = (1, 0, 0)^T$、$j = (0, 1, 0)^T$、$k = (0, 0, 1)^T$ 两两正交。

内积空间中的正交

定义 1.1

若两个 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 α 和 β 满足

$$\alpha \cdot \beta = 0,$$

则称 α 和 β正交，记做 $\alpha \perp \beta$。

- 0 向量与其它向量都正交。
- 向量 $\alpha = (x, y, 0)^T$ 与 $\beta = (0, 0, z)^T$ 正交。
- $i = (1, 0, 0)^T$、$j = (0, 1, 0)^T$、$k = (0, 0, 1)^T$ 两两正交。
- 向量 $\alpha = (1, 2, 3)^T$ 与向量 $\beta = (x, y, z)^T$ 正交的充分必要条件是：β 落在平面 $x + 2y + 3z = 0$ 上。

勾股定理

定理 1.2

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量 α 和 β，若 $\alpha \perp \beta$，则

$$\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2.$$

向量与空间的正交

定义 1.3

设 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间。若对任意的 $\beta \in V$，均有

$$\alpha \cdot \beta = 0,$$

则称向量 α 和空间 V 正交，记作 $\alpha \perp V$。

向量与空间的正交

定义 1.3

设 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间。若对任意的 $\beta \in V$，均有

$$\alpha \cdot \beta = 0,$$

则称向量 α 和空间 V 正交，记作 $\alpha \perp V$。

定义 1.4

设 V_1, V_2 都是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，若对 $\forall \alpha \in V_1, \beta \in V_2$，均有

$$\alpha \cdot \beta = 0,$$

则称 V_1 和 V_2 正交，记做 $V_1 \perp V_2$。

举例

例 1.5

举例

例 1.5

- 在 3 维立体坐标系中，取 V_1 是 xoy 平面，即

$$V_1 = \{(x, y, 0)^T | x, y \in \mathbb{R}\},$$

取 V_2 为 z 轴，即

$$V_2 = \{(0, 0, z)^T | z \in \mathbb{R}\},$$

则 $V_1 \perp V_2$。

举例

例 1.5

- 在 3 维立体坐标系中，取 V_1 是 xoy 平面，即
$$V_1 = \{(x, y, 0)^T | x, y \in \mathbb{R}\},$$
取 V_2 为 z 轴，即
$$V_2 = \{(0, 0, z)^T | z \in \mathbb{R}\},$$
则 $V_1 \perp V_2$。
- 在 $\mathbb{R}^3$ 中，取 V_1 是向量 $\alpha = (1, 2, 3)^T$ 生成的空间，V_2 是线性方程：$x + 2y + 3z = 0$ 的解空间，则 $V_1 \perp V_2$。

正交的性质

命题 1.6

设 V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间,

$$V_1 = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle, \quad V_2 = \langle \beta_1, \ldots, \beta_t \rangle.$$

则 $V_1 \perp V_2$ 当且仅当

$$\alpha_i \cdot \beta_j = 0, \forall i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, t.$$

正交的性质

命题 1.6

设 V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间,

$$V_1 = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle, \quad V_2 = \langle \beta_1, \ldots, \beta_t \rangle.$$

则 $V_1 \perp V_2$ 当且仅当

$$\alpha_i \cdot \beta_j = 0, \forall i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, t.$$

推论 1.7

设 A, B 是两个行数相同的矩阵,

$$V_1 = \mathrm{Im} A, \quad V_2 = \mathrm{Im} B.$$

则 $V_1 \perp V_2$ 当且仅当 $A^T B = 0$.

正交补

命题 1.8

设 V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。若 $V_1 \perp V_2$，则 $V_1 \cap V_2 = 0$。

正交补

命题 1.8

设 V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。若 $V_1 \perp V_2$，则 $V_1 \cap V_2 = 0$。

定理 1.9

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间，则存在唯一的一个 $\mathbb{R}^n$ 子空间 W，使得

$$V \perp W, \quad V \oplus W = \mathbb{R}^n.$$

正交补

命题 1.8

设 V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。若 $V_1 \perp V_2$，则 $V_1 \cap V_2 = 0$。

定理 1.9

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间，则存在唯一的一个 $\mathbb{R}^n$ 子空间 W，使得

$$V \perp W, \quad V \oplus W = \mathbb{R}^n.$$

- 称 W 是 V 的正交补空间，记 V 的正交补空间为 $V^{\perp}$。

重要结论

定理 1.10

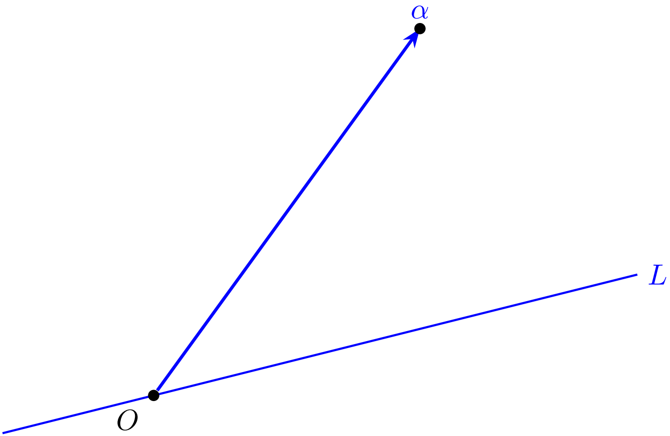
设 A 是一个列数为 n 的实矩阵。则在 $\mathbb{R}^n$ 中，

$$\mathrm{Ker} A = (\mathrm{Im} A^T)^{\perp}.$$

目录

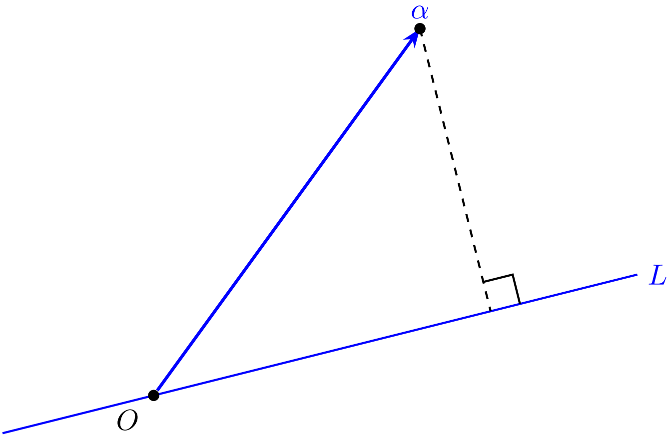
最短距离与正交投影

- 例：2 维平面中的最短距离



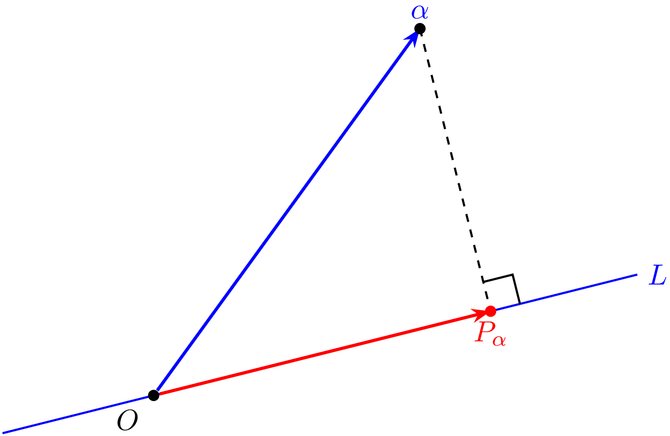
最短距离与正交投影

- 例：2 维平面中的最短距离



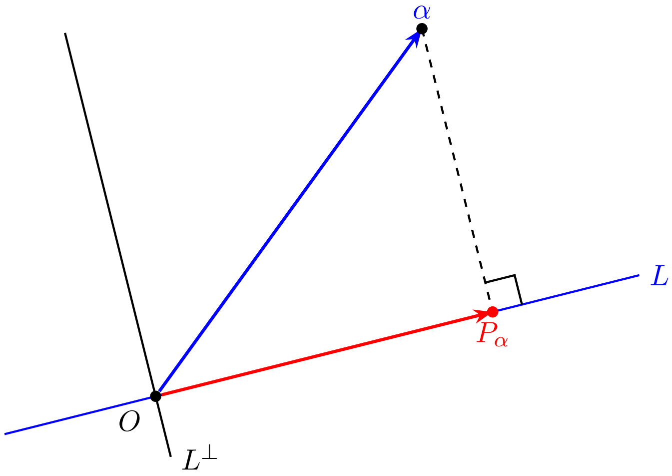
最短距离与正交投影

- 例：2 维平面中的最短距离



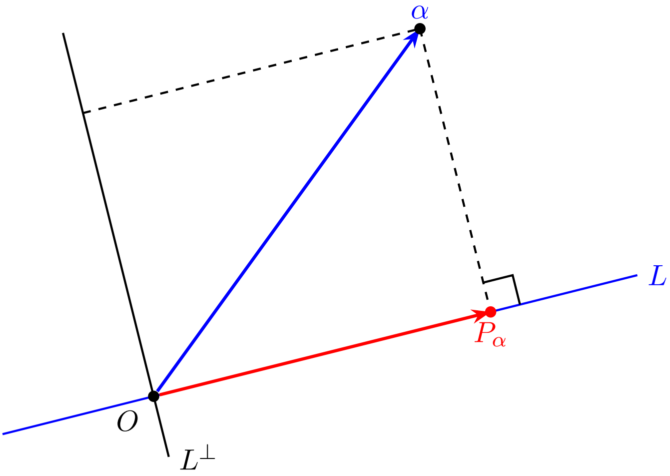
最短距离与正交投影

- 例：2 维平面中的最短距离



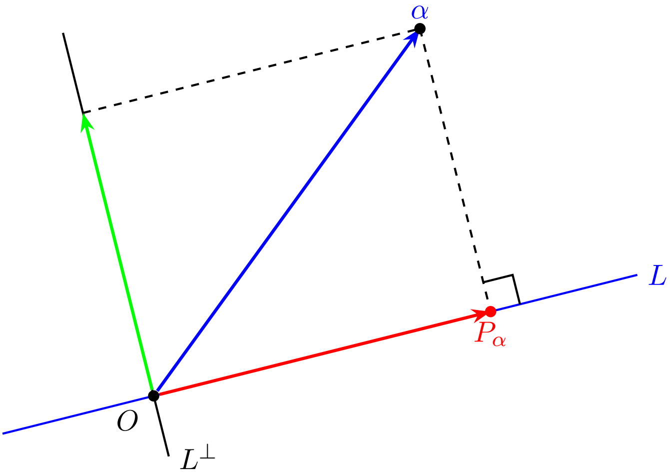
最短距离与正交投影

- 例：2 维平面中的最短距离



最短距离与正交投影

- 例：2 维平面中的最短距离



正交投影

定义 2.1

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$\alpha \in \mathbb{R}^n$。若

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

其中 $\alpha_1 \in V$，$\alpha_2 \in V^{\perp}$，则称 α_1 是 α 在空间 V 上的正交投影，记做 $\operatorname{Proj}_V(\alpha)$。

正交投影

定义 2.1

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$\alpha \in \mathbb{R}^n$。若

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

其中 $\alpha_1 \in V$，$\alpha_2 \in V^{\perp}$，则称 α_1 是 α 在空间 V 上的正交投影，记做 $\mathrm{Proj}_V(\alpha)$。

定理 2.2

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$\alpha \in \mathbb{R}^n$，则对任意的 $\beta \in V$，

$$\|\alpha - \mathrm{Proj}_V(\alpha)\| \leq \|\alpha - \beta\|.$$

正交投影

定义 2.1

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$\alpha \in \mathbb{R}^n$。若

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

其中 $\alpha_1 \in V$，$\alpha_2 \in V^\perp$，则称 α_1 是 α 在空间 V 上的正交投影，记做 $\mathrm{Proj}_V(\alpha)$。

定理 2.2

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$\alpha \in \mathbb{R}^n$，则对任意的 $\beta \in V$，

$$\|\alpha - \mathrm{Proj}_V(\alpha)\| \leq \|\alpha - \beta\|.$$

- $\mathrm{Proj}_V(\alpha)$：**最佳逼近元**

目录

最小二乘解

- 寻找 X，使得
$$\|AX-\beta\|$$
达到最小，这样的解称为最小二乘解。

最小二乘解

- 寻找 X，使得
$$\|AX-\beta\|$$
达到最小，这样的解称为最小二乘解。

- 所有解都是最小二乘解

最小二乘解

定理 3.1

对任意的矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\beta \in \mathbb{R}^m$，线性方程组

$$A^T AX = A^T \beta$$

均有解，且该方程组的所有解恰好就是

$$AX = \beta$$

的所有最小二乘解。

最小二乘解

定理 3.1

对任意的矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\beta \in \mathbb{R}^{m}$，线性方程组

$$A^T AX = A^T\beta$$

均有解，且该方程组的所有解恰好就是

$$AX = \beta$$

的所有最小二乘解。

- $A^T AX = A^T\beta$：**正规方程组**

最小二乘解

定理 3.2

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\beta \in \mathbb{R}^m$。若

$$r(A) = n,$$

则 $AX = \beta$ 有唯一的最小二乘解

$$X = (A^T A)^{-1} A^T \beta.$$

目录

广义逆的相关命题

命题 4.1

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。一个矩阵 B 满足:“若 $AX=\beta$ 有解，则 $X=B\beta$ 是 $AX=\beta$ 的一个解”的充分必要条件是

$$ABA = A.$$

广义逆的相关命题

命题 4.1

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。一个矩阵 B 满足:“若 $AX=\beta$ 有解，则 $X=B\beta$ 是 $AX=\beta$ 的一个解”的充分必要条件是

$$ABA = A.$$

命题 4.2

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。一个矩阵 B 满足:“对任意的 $\beta \in \mathbb{R}^m$，$X=B\beta$ 是 $AX=\beta$ 的一个最小二乘解”的充分必要条件是

$$ABA = A,\ (AB)^T = AB.$$

广义逆的相关命题

命题 4.3

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。一个矩阵 B 满足:“对任意的 $\beta \in \mathrm{Im}A$, $X = B\beta$ 是 $AX = \beta$ 的一个最小模解”的充分必要条件是

$$ABA = A,\ (BA)^T = BA.$$

MP 广义逆

定义 4.4

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。若矩阵 B 满足：

则称 B 是矩阵 A 的*Moore-Penrose 广义逆*，简称为*MP 逆*。

MP 广义逆

定义 4.4

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。若矩阵 B 满足:

1. $ABA = A$,

则称 B 是矩阵 A 的*Moore-Penrose 广义逆*，简称为*MP 逆*。

MP 广义逆

定义 4.4

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。若矩阵 B 满足：

1. $ABA = A$,
2. $BAB = B$,

则称 B 是矩阵 A 的*Moore-Penrose 广义逆*，简称为*MP 逆*。

MP 广义逆

定义 4.4

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。若矩阵 B 满足:

1. $ABA = A$,
2. $BAB = B$,
3. $(AB)^T = AB$,

则称 B 是矩阵 A 的*Moore-Penrose 广义逆*,简称为*MP 逆*。

MP 广义逆

定义 4.4

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。若矩阵 B 满足：

1. $ABA = A$,
2. $BAB = B$,
3. $(AB)^T = AB$,
4. $(BA)^T = BA$,

则称 B 是矩阵 A 的*Moore-Penrose 广义逆*，简称为*MP 逆*。

MP 广义逆

定义 4.4

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。若矩阵 B 满足：

1. $ABA = A$,
2. $BAB = B$,
3. $(AB)^T = AB$,
4. $(BA)^T = BA$,

则称 B 是矩阵 A 的*Moore-Penrose 广义逆*，简称为*MP 逆*。

- MP 逆均存在且唯一，记作 A^+。

MP 广义逆

定义 4.4

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$。若矩阵 B 满足：

1. $ABA=A$,
2. $BAB=B$,
3. $(AB)^T=AB$,
4. $(BA)^T=BA$,

则称 B 是矩阵 A 的*Moore-Penrose 广义逆*，简称为*MP 逆*。

- MP 逆均存在且唯一，记作 A^+。
- 对任意的实线性方程组 $AX=\beta$，$A^\dagger\beta$ 是模长最小的最小二乘解。