§5.1 标准内积及其几何意义

高等代数 https://gdfzu.club

目录

标准内积的概念

定义 1.1

设 $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$、$\beta = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$。$\alpha$ 与 β 的*(标准)内积*（也称点积、数量积），记做 $\alpha \cdot \beta$，定义为

$$\alpha \cdot \beta \triangleq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

标准内积的概念

定义 1.1

设 $\alpha=(a_1,\ldots,a_n)^T\in\mathbb{R}^n$、$\beta=(b_1,\ldots,b_n)^T\in\mathbb{R}^n$。$\alpha$ 与 β 的*(标准)内积*（也称点积、数量积），记做 $\alpha\cdot\beta$，定义为

$$\alpha\cdot\beta\triangleq a_1b_1+\cdots+a_nb_n.$$

- **例**：$\alpha=(1,2,3)^T$、$\beta=(4,5,6)^T$，**求** $\alpha\cdot\beta$。

内积与矩阵乘法

- $\alpha \cdot \beta = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha.$

内积与矩阵乘法

- $\alpha \cdot \beta = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha.$

- 记 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix}, \quad B = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$, 则

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \beta_1 & \cdots & \alpha_1^T \beta_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m^T \beta_1 & \cdots & \alpha_m^T \beta_k \end{pmatrix} = (\alpha_i \cdot \beta_j)_{m \times k}$$

内积的运算性质

定理 1.2

设 α、β 和 γ 是任给的 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量，c 是一个实数。则内积运算满足下述运算性质：

内积的运算性质

定理 1.2

设 α、β 和 γ 是任给的 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量，c 是一个实数。则内积运算满足下述运算性质：

- 交换性：$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$，

内积的运算性质

定理 1.2

设 α、β 和 γ 是任给的 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量，c 是一个实数。则内积运算满足下述运算性质：

- 交换性：$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$，
- 保加法：$(\alpha + \gamma) \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \gamma \cdot \beta$，

内积的运算性质

定理 1.2

设 α、β 和 γ 是任给的 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量，c 是一个实数。则内积运算满足下述运算性质：

- 交换性：$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$，
- 保加法：$(\alpha + \gamma) \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \gamma \cdot \beta$，
- 保数乘：$(c\alpha) \cdot \beta = c(\alpha \cdot \beta)$，

内积的运算性质

定理 1.2

设 α、β 和 γ 是任给的 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量，c 是一个实数。则内积运算满足下述运算性质：

- 交换性：$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$，
- 保加法：$(\alpha + \gamma) \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \gamma \cdot \beta$，
- 保数乘：$(c\alpha) \cdot \beta = c(\alpha \cdot \beta)$，
- 正定性：$\alpha \cdot \alpha \geq 0$，且 $\alpha \cdot \alpha = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$。

内积的运算性质

定理 1.2

设 α、β 和 γ 是任给的 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量，c 是一个实数。则内积运算满足下述运算性质：

- 交换性：$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$，
- 保加法：$(\alpha+\gamma)\cdot\beta=\alpha\cdot\beta+\gamma\cdot\beta$，
- 保数乘：$(c\alpha)\cdot\beta=c(\alpha\cdot\beta)$，
- 正定性：$\alpha\cdot\alpha\geq 0$，且 $\alpha\cdot\alpha=0$ 当且仅当 $\alpha=0$。

- **保加法'**：$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$，

内积的运算性质

定理 1.2

设 α、β 和 γ 是任给的 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量，c 是一个实数。则内积运算满足下述运算性质：

- 交换性：$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$，
- 保加法：$(\alpha + \gamma) \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \gamma \cdot \beta$，
- 保数乘：$(c\alpha) \cdot \beta = c(\alpha \cdot \beta)$，
- 正定性：$\alpha \cdot \alpha \geq 0$，且 $\alpha \cdot \alpha = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$。

- **保加法'**：$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$，
- **保数乘'**：$\alpha \cdot (c\beta) = c(\alpha \cdot \beta)$。

标准内积空间

定义 1.3

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间。集合 V、线性空间的加法运算、数乘运算，以及内积运算，这四者构成的整体称为一个标准内积空间。

标准内积空间

定义 1.3

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间。集合 V、线性空间的加法运算、数乘运算，以及内积运算，这四者构成的整体称为一个标准内积空间。

- 内积空间 $\mathbb{R}^n$

标准内积空间

定义 1.3

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间。集合 V、线性空间的加法运算、数乘运算，以及内积运算，这四者构成的整体称为一个标准内积空间。

- 内积空间 $\mathbb{R}^n$
- 内积空间是结构更为丰富的线性空间

标准内积空间

定义 1.3

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间。集合 V、线性空间的加法运算、数乘运算，以及内积运算，这四者构成的整体称为一个标准内积空间。

- 内积空间 $\mathbb{R}^n$
- 内积空间是结构更为丰富的线性空间
- 线性子空间相关的定义，如维数、子空间、直和等，对于标准内积空间依然适用

目录

长度

- 长度、**范数**：$\|\alpha\|$

长度

- **长度**、**范数**：$\|\alpha\|$
- $\alpha=(x,y)^T\in\mathbb{R}^2$ 时，
$$\|\alpha\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

长度

- 长度、范数：$\|\alpha\|$
- $\alpha = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ 时，
$$\|\alpha\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
- $\alpha = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ 时，
$$\|\alpha\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

长度

- 长度、范数：$\|\alpha\|$
- $\alpha=(x,y)^T\in\mathbb{R}^2$ 时，

$$\|\alpha\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

- $\alpha=(x,y,z)^T\in\mathbb{R}^3$ 时，

$$\|\alpha\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

定义 2.1

设 $\alpha=(a_1,\ldots,a_n)^T\in\mathbb{R}^n$。向量 α 的长度（也称为范数），记做 $\|\alpha\|$，定义为

$$\|\alpha\|\triangleq\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}.$$

长度和内积

- 长度也可以由内积定义：

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}.$$

长度和内积

- 长度也可以由内积定义:

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}.$$

命题 2.2

设 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 是一个任意给定的列向量，c 是一个任意实数，则

$$\|c\alpha\| = |c|\|\alpha\|.$$

向量的极分解

- **极分解：** $\alpha = \|\alpha\| \cdot \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$.

向量的极分解

- **极分解：** $\alpha = \|\alpha\| \cdot \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$.

- **单位向量** $\frac{\alpha}{\|\alpha\|} \triangleq e_\alpha$**：** α **的方向信息**

向量的极分解

- **极分解：** $\alpha = \|\alpha\| \cdot \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$.
- **单位向量** $\frac{\alpha}{\|\alpha\|} \triangleq e_\alpha$**：** α **的方向信息**
- **长度** $\|\alpha\|$**：** α **的大小信息**

向量的极分解

- 极分解：$\alpha = \|\alpha\| \cdot \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$.
- 单位向量 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|} \triangleq e_\alpha$：$\alpha$ 的方向信息
- 长度 $\|\alpha\|$：α 的大小信息
- $\alpha \to e_\alpha$：单位化

Cauchy 不等式

定理 2.3

对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，总有

$$|\alpha \cdot \beta| \leq \|\alpha\| \|\beta\|.$$

其中等号成立的充分必要条件是 α 与 β 线性相关。

三角不等式与距离

定理 2.4

对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，总有

$$\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

三角不等式与距离

定理 2.4

对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，总有

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

定义 2.5

$\mathbb{R}^n$ 中的两个点 α 和 β 间的距离，记做 $d(\alpha, \beta)$，定义为

$$d(\alpha, \beta) \triangleq \|\alpha - \beta\|.$$

目录

夹角与内积

- 平面向量夹角：两个向量为两边的不超过 180 度的角

夹角与内积

- 平面向量夹角：两个向量为两边的不超过 180 度的角
- 余弦定理：$\|\alpha-\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2-2\|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta.$

夹角与内积

- 平面向量夹角：两个向量为两边的不超过 180 度的角
- 余弦定理：$\|\alpha-\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2-2\|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta.$
- $\alpha\cdot\beta=\|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta.$

夹角与内积

- **平面向量夹角：两个向量为两边的不超过 180 度的角**
- **余弦定理：** $\|\alpha-\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2-2\|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta.$
- $\alpha\cdot\beta=\|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta.$

定义 3.1

设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$，$0\leq\theta\leq\pi$。若 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|\|\beta\|},$$

则称 θ 是 α 和 β 的夹角。

例子

- Cauchy 不等式保证了夹角定义的合理性。

例子

- Cauchy 不等式保证了夹角定义的合理性。

- 例：计算向量 $\alpha = (1, 0, 1)^T$ 和 $\beta = (0, 1, 1)^T$ 的夹角。

例子

- Cauchy 不等式保证了夹角定义的合理性。
- 例：计算向量 $\alpha = (1, 0, 1)^T$ 和 $\beta = (0, 1, 1)^T$ 的夹角。
- $\cos\theta = e_\alpha \cdot e_\beta$