§4.5 线性方程组解的结构

高等代数 https://gdfzu.club

目录

齐次方程组解的结构

定理 1.1

设 η_1,η_2 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，则对任意的 $c_1,c_2\in\mathbb{F}$，$c_1\eta_1+c_2\eta_2$ 仍是 $AX=0$ 的解，即齐次方程组的解集合

$$\{X|AX=0\}$$

是 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间。

齐次方程组解的结构

定理 1.1

设 η_1, η_2 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解，则对任意的 $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$，$c_1\eta_1 + c_2\eta_2$ 仍是 $AX = 0$ 的解，即齐次方程组的解集合

$$\{X|AX = 0\}$$

是 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间。

- 齐次方程组的解集也被称为解空间

齐次方程组解的结构

定理 1.1

设 η_1, η_2 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，则对任意的 $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$，$c_1\eta_1 + c_2\eta_2$ 仍是 $AX=0$ 的解，即齐次方程组的解集合

$$\{X|AX=0\}$$

是 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间。

- 齐次方程组的解集也被称为解空间
- $\mathrm{Ker}A = \{X|AX=0\}$

基础解系

定义 1.2

如果齐次线性方程组 $AX=0$ 的一组解 $\eta_1,\dots,\eta_s$ 满足:

则称其为 $AX=0$ 的一个基础解系。

基础解系

定义 1.2

如果齐次线性方程组 $AX=0$ 的一组解 $\eta_1,\ldots,\eta_s$ 满足:

1. $\eta_1,\ldots,\eta_s$ 线性无关;

则称其为 $AX=0$ 的一个基础解系。

基础解系

定义 1.2

如果齐次线性方程组 $AX=0$ 的一组解 $\eta_1,\ldots,\eta_s$ 满足:

1. $\eta_1,\ldots,\eta_s$ 线性无关;
2. 任意解向量都可由 $\eta_1,\ldots,\eta_s$ 线性表出,

则称其为 $AX=0$ 的一个基础解系。

基础解系

定义 1.2

如果齐次线性方程组 $AX=0$ 的一组解 $\eta_1,\ldots,\eta_s$ 满足：

1. $\eta_1,\ldots,\eta_s$ 线性无关；
2. 任意解向量都可由 $\eta_1,\ldots,\eta_s$ 线性表出，

则称其为 $AX=0$ 的一个基础解系。

- **通解：** $c_1\eta_1+\cdots+c_s\eta_s, \quad c_1,\ldots,c_s\in\mathbb{F}$

解空间维数

定理 1.3

对于 n 元线性方程组 $AX=0$，如果 $r(A)=r<n$，则该方程组必有基础解系，且基础解系由 $n-r$ 个向量组成，即

$$\dim \mathrm{Ker} A = n - r(A).$$

例题

例 1.4

求解下面的齐次线性方程组的基础解系和通解:

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 - 2y_4 + 4y_5 & = 0, \\ 2y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 5y_5 & = 0, \\ 4y_1 + 11y_2 + 5y_3 + 8y_4 & = 0, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 & = 0. \end{cases}$$

例题

例 1.5

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，且

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \beta_2=\alpha_2-\alpha_3, \beta_3=\alpha_2+\alpha_3,$$

问：β_1,β_2,β_3 能否作为 $AX=0$ 的一个基础解系?

例题

例 1.5

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，且

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=\alpha_2+\alpha_3,$$

问：β_1,β_2,β_3 能否作为 $AX=0$ 的一个基础解系?

例 1.6

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{n\times s}$ 满足 $AB=0$，证明：$r(A)+r(B)\le n$。

秩的重要结论

命题 1.7

设 A 为 n 阶方阵，则

$$r(\mathrm{adj}A)=\begin{cases} n, & 当 r(A)=n; \\ 1, & 当 r(A)=n-1; \\ 0, & 当 r(A)<n-1. \end{cases}$$

秩的重要结论

命题 1.7

设 A 为 n 阶方阵，则

$$r(\text{adj}A)=\begin{cases} n, & \text{当} r(A)=n; \\ 1, & \text{当} r(A)=n-1; \\ 0, & \text{当} r(A)<n-1. \end{cases}$$

命题 1.8

设 A 是 $m\times n$实矩阵，证明：$r(A^TA)=r(AA^T)=r(A)$。

目录

非齐次方程组解的结构

- $AX=\beta$ 与 $AX=0$

非齐次方程组解的结构

- $AX=\beta$ 与 $AX=0$

引理 2.1

设 γ_1,γ_2 是 $AX=\beta$ 的解，η 是相应齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，则

非齐次方程组解的结构

- $AX=\beta$ 与 $AX=0$

引理 2.1

设 γ_1,γ_2 是 $AX=\beta$ 的解，η 是相应齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，则

1. $\gamma_1-\gamma_2$ 是 $AX=0$ 的解；

非齐次方程组解的结构

- $AX=\beta$ 与 $AX=0$

引理 2.1

设 γ_1,γ_2 是 $AX=\beta$ 的解，η 是相应齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，则

1. $\gamma_1-\gamma_2$ 是 $AX=0$ 的解；
2. $\gamma_1+\eta$ 是 $AX=\beta$ 的解。

非齐次方程组解的结构

定理 2.2

对 n 元非齐次线性方程组 $AX=\beta$，如果满足 $r(A)=r(\overline{A})=r<n$，则列向量 X 是方程组 $AX=\beta$ 的解当且仅当 X 可以被表示为

$$\gamma+c_1\eta_1+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中，γ 为该非齐次线性方程组的一个特定的解（简称特解），$\eta_1,\ldots,\eta_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，$c_1,\ldots,c_{n-r}$ 为 $\mathbb{F}$ 中的任意数。

非齐次方程组解的结构

定理 2.2

对 n 元非齐次线性方程组 $AX=\beta$，如果满足 $r(A)=r(\overline{A})=r<n$，则列向量 X 是方程组 $AX=\beta$ 的解当且仅当 X 可以被表示为

$$\gamma+c_1\eta_1+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中，γ 为该非齐次线性方程组的一个特定的解（简称特解），$\eta_1,\ldots,\eta_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，$c_1,\ldots,c_{n-r}$ 为 $\mathbb{F}$ 中的任意数。

- **通解**：$\gamma+c_1\eta_1+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$

非齐次方程组解的结构

- 记 $\gamma + W = \{\gamma + \alpha | \alpha \in W\}$

非齐次方程组解的结构

- 记 $\gamma + W = \{\gamma + \alpha | \alpha \in W\}$
- $\gamma + \mathrm{Ker} A$

非齐次方程组解的结构

- 记 $\gamma + W = \{\gamma + \alpha | \alpha \in W\}$
- $\gamma + \mathrm{Ker} A$
- 非齐次方程组的解集是线性方程组解集的一个平移。

非齐次方程组解的结构

- 记 $\gamma + W = \{\gamma + \alpha | \alpha \in W\}$
- $\gamma + \mathrm{Ker} A$
- 非齐次方程组的解集是线性方程组解集的一个平移。

例 2.3

求非齐次线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}.$$

例子

例 2.4

设 A 为 $m\times 3$ 矩阵且 $r(A)=1$。如果非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的三个解向量 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 满足

$$\gamma_1+\gamma_2=(1,2,3)^T,\gamma_2+\gamma_3=(0,-1,1)^T,\gamma_3+\gamma_1=(1,0,-1)^T,$$

求 $AX=\beta$ 的通解。