§4.4 $\mathbb{F}^m$ 的子空间、基与维数

高等代数 https://gdfzu.club

目录

子空间的定义

定义 1.1

设 $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{F}^m$。若 V 对于加法和数乘封闭，即对 $\forall \alpha, \beta \in V$，$\forall c \in \mathbb{F}$，

则称 V 是 $\mathbb{F}^m$ 的线性子空间，或简称为 $\mathbb{F}^m$ 的子空间。

子空间的定义

定义 1.1

设 $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{F}^m$。若 V 对于加法和数乘封闭，即对 $\forall \alpha, \beta \in V$，$\forall c \in \mathbb{F}$，

1. $\alpha + \beta \in V$;

则称 V 是 $\mathbb{F}^m$ 的线性子空间，或简称为 $\mathbb{F}^m$ 的子空间。

子空间的定义

定义 1.1

设 $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{F}^m$。若 V 对于加法和数乘封闭，即对 $\forall \alpha, \beta \in V$，$\forall c \in \mathbb{F}$，

1. $\alpha + \beta \in V$;
2. $c\alpha \in V$,

则称 V 是 $\mathbb{F}^m$ 的线性子空间，或简称为 $\mathbb{F}^m$ 的子空间。

子空间的定义

定义 1.1

设 $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{F}^m$。若 V 对于加法和数乘封闭，即对 $\forall \alpha, \beta \in V$，$\forall c \in \mathbb{F}$，

1. $\alpha + \beta \in V$;
2. $c\alpha \in V$，

则称 V 是 $\mathbb{F}^m$ 的线性子空间，或简称为 $\mathbb{F}^m$ 的子空间。

- V 也可以被称为列向量空间；

子空间的定义

定义 1.1

设 $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{F}^m$。若 V 对于加法和数乘封闭，即对 $\forall \alpha, \beta \in V$，$\forall c \in \mathbb{F}$，

1. $\alpha + \beta \in V$;
2. $c\alpha \in V$,

则称 V 是 $\mathbb{F}^m$ 的线性子空间，或简称为 $\mathbb{F}^m$ 的子空间。

- V 也可以被称为列向量空间；
- 若 $\emptyset \neq V_1 \subseteq V \subseteq \mathbb{F}^m$，且 V 和 V_1 都是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，则我们也称 V_1 是 V 的子空间。

子空间的例子

- 0 子空间：$V = \{0\}$

子空间的例子

- 0 子空间：$V = \{0\}$
- 平凡子空间

子空间的例子

- 0 子空间：$V = \{0\}$
- 平凡子空间
- 非平凡子空间

子空间的例子

- 0 **子空间**：$V=\{0\}$
- **平凡子空间**
- **非平凡子空间**

例 1.2

$\mathbb{R}^3$ 的非平凡子空间有两种，一种是通过坐标原点的直线，另一种是通过坐标原点的平面。

子空间的例子

- 0 子空间：$V = \{0\}$
- 平凡子空间
- 非平凡子空间

例 1.2

$\mathbb{R}^3$ 的非平凡子空间有两种，一种是通过坐标原点的直线，另一种是通过坐标原点的平面。

例 1.3

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是 $\mathbb{F}^m$ 中的列向量组，则 $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ 是 $\mathbb{F}^m$ 中包含 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的最小子空间。

目录

子空间的交

命题 2.1

设 V_1, V_2 是列向量空间 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，则

$$V_1 \cap V_2 = \{\alpha | \alpha \in V_1, \alpha \in V_2\}$$

也是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间。

子空间的交

命题 2.1

设 V_1, V_2 是列向量空间 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，则

$$V_1 \cap V_2 = \{\alpha | \alpha \in V_1, \alpha \in V_2\}$$

也是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间。

定义 2.2

设 V_1, V_2 是列向量空间 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，定义 $V_1 \cap V_2$ 为 V_1 与 V_2 的交空间。

子空间的交

命题 2.1

设 V_1, V_2 是列向量空间 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，则

$$V_1 \cap V_2 = \{\alpha | \alpha \in V_1, \alpha \in V_2\}$$

也是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间。

定义 2.2

设 V_1, V_2 是列向量空间 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，定义 $V_1 \cap V_2$ 为 V_1 与 V_2 的交空间。

- 例：在 $\mathbb{R}^3$ 中，设 V_1, V_2 是过坐标原点的两个不重合的平面，则 V_1, V_2 都是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，此时 $V_1 \cap V_2$ 是一条经过原点的直线，也是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间。

子空间的和

- **和运算：** $V_1 + V_2 \triangleq \{\alpha_1 + \alpha_2 | \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$

子空间的和

- **和运算：** $V_1 + V_2 \triangleq \{\alpha_1 + \alpha_2 | \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$

命题 2.3

$V_1 + V_2$ 也是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间。

子空间的和

- **和运算：** $V_1 + V_2 \triangleq \{\alpha_1 + \alpha_2 | \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$

命题 2.3

$V_1 + V_2$ 也是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间。

定义 2.4

定义 $V_1 + V_2$ 为 V_1 与 V_2 的和空间。

和空间

例 2.5

坐标平面 xoy 可以看成 $\mathbb{R}^2$，取 V_1 其中的 x 轴、V_2 是 y 轴。易知

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$$

都是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间。按照定义

$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

和空间与并运算

命题 2.6

设 V_1, V_2 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，则

$$\langle V_1 \cup V_2 \rangle = V_1 + V_2,$$

即和空间 $V_1 + V_2$ 是包含 $V_1 \cup V_2$ 的最小的子空间。

多个子空间的运算

- $V_1 \cap \cdots \cap V_s = \{\alpha | \alpha \in V_i, i = 1, \ldots, s\}$

多个子空间的运算

- $V_1 \cap \cdots \cap V_s = \{\alpha | \alpha \in V_i, i = 1, \ldots, s\}$

- $V_1 + \cdots + V_s = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s | \alpha_i \in V_i, i = 1, \ldots, s\}$

多个子空间的运算

- $V_1 \cap \cdots \cap V_s = \{\alpha | \alpha \in V_i, i = 1, \ldots, s\}$

- $V_1 + \cdots + V_s = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_s | \alpha_i \in V_i, i = 1, \ldots, s\}$

- 子空间的交运算与和运算同时满足交换律和结合律

目录

空间的基

- $\mathbb{R}^3$ **中的** $i = (1,0,0)^T$，$j = (0,1,0)^T$，$k = (0,0,1)^T$

空间的基

- $\mathbb{R}^3$ 中的 $i=(1,0,0)^T$，$j=(0,1,0)^T$，$k=(0,0,1)^T$

定义 3.1

如果在线性子空间 V 中存在 n 个向量 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 满足:

则称 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 为 V 的一个基。

空间的基

- $\mathbb{R}^3$ 中的 $i=(1,0,0)^T$，$j=(0,1,0)^T$，$k=(0,0,1)^T$

定义 3.1

如果在线性子空间 V 中存在 n 个向量 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 满足:

1. V 中任一向量均可表示为 $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 的线性组合,

则称 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 为 V 的一个基。

空间的基

- $\mathbb{R}^3$ 中的 $i = (1,0,0)^T$，$j = (0,1,0)^T$，$k = (0,0,1)^T$

定义 3.1

如果在线性子空间 V 中存在 n 个向量 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 满足:

1. V 中任一向量均可表示为 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 的线性组合，
2. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关，

则称 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 为 V 的一个基。

空间的基

- $\mathbb{R}^3$ 中的 $i = (1,0,0)^T$，$j = (0,1,0)^T$，$k = (0,0,1)^T$

定义 3.1

如果在线性子空间 V 中存在 n 个向量 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 满足:

1. V 中任一向量均可表示为 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 的线性组合，
2. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关，

则称 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 为 V 的一个基。

例 3.2

$\mathbb{F}^m$ 中，记 $\varepsilon_1 = (1,0,\ldots,0)^T, \ldots, \varepsilon_m = (0,\ldots,0,1)^T$，则 $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ 是一组最常用的 $\mathbb{F}^m$ 基，也称为 $\mathbb{F}^m$ 的标准基。

维数

定义 3.3

设 V 是 $\mathbb{F}^m$ 的一个子空间。若 V 的基由 n 个向量组成，则称 V 为一个n 维线性子空间，n 称为 V 的维数，记作 $\dim V$。

维数

定义 3.3

设 V 是 $\mathbb{F}^m$ 的一个子空间。若 V 的基由 n 个向量组成，则称 V 为一个n 维线性子空间，n 称为 V 的维数，记作 $\dim V$。

- **约定：若** $V = 0$，**则记** $\dim V = 0$。

维数

定义 3.3

设 V 是 $\mathbb{F}^m$ 的一个子空间。若 V 的基由 n 个向量组成，则称 V 为一个n 维线性子空间，n 称为 V 的维数，记作 $\dim V$。

- **约定：若** $V = 0$，**则记** $\dim V = 0$。

定理 3.4

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，则 A 列向量组生成的子空间维数等于矩阵 A 的秩，即

$$\dim \mathrm{Im} A = r(A).$$

基的等价条件

定理 3.5

设 $\dim V = n$，$\xi_1, \ldots, \xi_n \in V$，则以下几点等价:

基的等价条件

定理 3.5

设 $\dim V = n$，$\xi_1, \ldots, \xi_n \in V$，则以下几点等价：

1. $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 是 V 的一个基；

基的等价条件

定理 3.5

设 $\dim V = n$，$\xi_1, \ldots, \xi_n \in V$，则以下几点等价：

1. $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 是 V 的一个基；
2. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关且 V 中任一向量均可由 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性表出；

基的等价条件

定理 3.5

设 $\dim V = n$，$\xi_1, \ldots, \xi_n \in V$，则以下几点等价:

1. $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 是 V 的一个基;
2. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关且 V 中任一向量均可由 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性表出;
3. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关且 V 中任一向量添加到 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 所得的新向量组线性相关;

基的等价条件

定理 3.5

设 $\dim V = n$，$\xi_1, \ldots, \xi_n \in V$，则以下几点等价：

1. $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 是 V 的一个基；
2. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关且 V 中任一向量均可由 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性表出；
3. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关且 V 中任一向量添加到 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 所得的新向量组线性相关；
4. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关；

基的等价条件

定理 3.5

设 $\dim V = n$，$\xi_1, \ldots, \xi_n \in V$，则以下几点等价：

1. $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 是 V 的一个基；
2. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关且 V 中任一向量均可由 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性表出；
3. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关且 V 中任一向量添加到 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 所得的新向量组线性相关；
4. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关；
5. V 中任一向量均可由 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性表出；

基的等价条件

定理 3.5

设 $\dim V = n$，$\xi_1, \ldots, \xi_n \in V$，则以下几点等价：

1. $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 是 V 的一个基；
2. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关且 V 中任一向量均可由 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性表出；
3. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关且 V 中任一向量添加到 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 所得的新向量组线性相关；
4. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性无关；
5. V 中任一向量均可由 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性表出；
6. V 中任一向量均可由 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 线性表出，且表示法唯一。

扩基定理

定理 3.6

设 V 是 n 维线性空间，$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 是 V 中 $r(r < n)$ 个线性无关向量，又 $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ 是 V 的一个基，则必可在 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 中选出 $n - r$ 个向量，使其和 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 一起凑成 V 的一个基。

维数公式

定理 3.7

设 V_1, V_2 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，则

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2.$$

维数公式

定理 3.7

设 V_1, V_2 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，则

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2.$$

例 3.8

在 $\mathbb{F}^4$ 中，设

$$\alpha_1=(1,2,1,0)^T, \alpha_2=(-1,1,1,1)^T,$$
$$\beta_1=(2,-1,0,1)^T, \beta_2=(1,-1,3,7)^T,$$

记 $V_1=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$，$V_2=\langle\beta_1,\beta_2\rangle$。

维数公式

定理 3.7

设 V_1, V_2 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，则

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

例 3.8

在 $\mathbb{F}^4$ 中，设

$$\alpha_1 = (1, 2, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 1, 1)^T,$$
$$\beta_1 = (2, -1, 0, 1)^T, \beta_2 = (1, -1, 3, 7)^T,$$

记 $V_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$，$V_2 = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$。

1. 求 $V_1 + V_2$ 的维数与一个基；

维数公式

定理 3.7

设 V_1, V_2 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，则

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

例 3.8

在 $\mathbb{F}^4$ 中，设

$$\alpha_1 = (1,2,1,0)^T, \alpha_2 = (-1,1,1,1)^T,$$
$$\beta_1 = (2,-1,0,1)^T, \beta_2 = (1,-1,3,7)^T,$$

记 $V_1 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$，$V_2 = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$。

1. 求 $V_1 + V_2$ 的维数与一个基；
2. 求 $V_1 \cap V_2$ 的维数与一个基。

目录

直和的定义

定义 4.1

设 V_1, V_2 是 V 的子空间。若 $V_1 + V_2$ 中的任意向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$$

唯一，则称 $V_1 + V_2$ 为直和，记为 $V_1 \oplus V_2$。

直和的定义

定义 4.1

设 V_1, V_2 是 V 的子空间。若 V_1+V_2 中的任意向量 α 的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1\in V_1, \alpha_2\in V_2$$

唯一，则称 V_1+V_2 为直和，记为 $V_1\oplus V_2$。

- **分解式唯一 $\Leftrightarrow$ 若有**

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2, \alpha_1, \beta_1\in V_1, \alpha_2, \beta_2\in V_2,$$

则总有 $\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2$。

例子

例 4.2

设 $V = \mathbb{R}^3$。

例子

例 4.2

设 $V=\mathbb{R}^3$。

1. 取
$$V_1=\{(x,y,0)^T|x,y\in\mathbb{R}\},$$
$$V_2=\{(0,0,z)^T|z\in\mathbb{R}\},$$
则
$$V=V_1\oplus V_2.$$

例子

例 4.2

设 $V=\mathbb{R}^3$。

1. 取
$$V_1=\{(x,y,0)^T|x,y\in\mathbb{R}\},$$
$$V_2=\{(0,0,z)^T|z\in\mathbb{R}\},$$
则
$$V=V_1\oplus V_2.$$
2. 取
$$U_1=V_1=\{(x,y,0)^T|x,y\in\mathbb{R}\},$$
$$U_2=\{(0,y,z)^T|y,z\in\mathbb{R}\},$$
则 $V=U_1+U_2$，但 U_1+U_2 不是直和。

直和的判定

定理 4.3

设 V_1, V_2 是 V 的子空间。则 $V_1 + V_2$ 是直和的充分必要条件是 0 向量分解式唯一。

直和的判定

定理 4.3

设 V_1, V_2 是 V 的子空间。则 $V_1 + V_2$ 是直和的充分必要条件是 0 向量分解式唯一。

定理 4.4

若 V_1，V_2 是 V 的子空间，则 $V_1 + V_2$ 是直和的充要条件是 $V_1 \cap V_2 = 0$。

直和的判定

定理 4.3

设 V_1, V_2 是 V 的子空间。则 V_1+V_2 是直和的充分必要条件是 *0* 向量分解式唯一。

定理 4.4

若 V_1，V_2 是 V 的子空间，则 V_1+V_2 是直和的充要条件是 $V_1 \cap V_2 = 0$。

推论 4.5

若 V_1，V_2 是列向量空间 V 的子空间，则下述命题等价：

直和的判定

定理 4.3

设 V_1, V_2 是 V 的子空间。则 V_1+V_2 是直和的充分必要条件是 *0* 向量分解式唯一。

定理 4.4

若 V_1，V_2 是 V 的子空间，则 V_1+V_2 是直和的充要条件是 $V_1 \cap V_2 = 0$。

推论 4.5

若 V_1，V_2 是列向量空间 V 的子空间，则下述命题等价：

1. V_1+V_2 是直和；

直和的判定

定理 4.3

设 V_1, V_2 是 V 的子空间。则 $V_1 + V_2$ 是直和的充分必要条件是 *0* 向量分解式唯一。

定理 4.4

若 V_1，V_2 是 V 的子空间，则 $V_1 + V_2$ 是直和的充要条件是 $V_1 \cap V_2 = 0$。

推论 4.5

若 V_1，V_2 是列向量空间 V 的子空间，则下述命题等价：

1. $V_1 + V_2$ 是直和；
2. $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$；

直和的判定

定理 4.3

设 V_1, V_2 是 V 的子空间。则 V_1+V_2 是直和的充分必要条件是 *0* 向量分解式唯一。

定理 4.4

若 V_1，V_2 是 V 的子空间，则 V_1+V_2 是直和的充要条件是 $V_1\cap V_2=0$。

推论 4.5

若 V_1，V_2 是列向量空间 V 的子空间，则下述命题等价：

1. V_1+V_2 是直和；
2. $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$；
3. V_1 的任意一组基与 V_2 的任意一组基的并构成 V_1+V_2 的一组基。

多个子空间的直和

定义 4.6

设 $V_1, \ldots, V_s$ 均为 $\mathbb{F}^m$ 的子空间。若 $V_1 + \cdots + V_s$ 中任意向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s,\ \alpha_i \in V_i,\ i = 1, \ldots, s$$

均唯一，则称 $V_1 + \cdots + V_s$ 为直和，记做 $V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ 或 $\bigoplus_{i=1}^{s} V_i$。

多个子空间的直和

定义 4.6

设 $V_1, \ldots, V_s$ 均为 $\mathbb{F}^m$ 的子空间。若 $V_1 + \cdots + V_s$ 中任意向量 α 的分解式

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s,\ \alpha_i \in V_i,\ i = 1, \ldots, s$$

均唯一，则称 $V_1 + \cdots + V_s$ 为直和，记做 $V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ 或 $\bigoplus_{i=1}^{s} V_i$。

例 4.7

设 $V = \mathbb{R}^2$，取

$$V_1 = \{(x, 0)^T | x \in R\},$$
$$V_2 = \{(0, y)^T | y \in R\},$$
$$V_3 = \{(x, x)^T | x \in R\},$$

则 $V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_3 = V_3 \cap V_1 = \{0\}$，但 $V_1 + V_2 + V_3$ 不是直和。