§4.3 生成子空间、极大无关组与秩

高等代数 https://gdfzu.club

目录

生成子空间

- $\mathrm{Im}A \triangleq \{c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n | c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}\}$

生成子空间

- $\mathrm{Im}A \triangleq \{c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n | c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}\}$
- 集合 $\mathrm{Im}A$ 对列向量的加法和数乘封闭。

生成子空间

- $\mathrm{Im}A \triangleq \{c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n | c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}\}$
- **集合 $\mathrm{Im}A$ 对列向量的加法和数乘封闭。**

定义 1.1

设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 是 $\mathbb{F}^m$ 中的列向量组。称集合

$$\{c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n | c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}\}$$

为由 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 生成的子空间，或也称为向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的生成子空间，记做 $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$。
特别地，一个矩阵 A 的列向量组生成的子空间也称为 A 的列空间，记做 $\mathrm{Im}A$。

线性方程组与空间

命题 1.2

$AX = \beta$ 有解的充分必要条件是 $\beta \in \mathrm{Im}A$。

目录

极大无关组的定义

定义 2.1

若向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 的子向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$ 满足:

则称 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组，简称为极大无关组。

极大无关组的定义

定义 2.1

若向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的子向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 满足:

1. $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;

则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组，简称为极大无关组。

极大无关组的定义

定义 2.1

若向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的子向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 满足:

1. $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
2. 将原向量组中任意一个向量添加到 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 得到的 $r+1$ 个向量线性相关,

则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组，简称为极大无关组。

举例

- 对于所有向量都是零向量构成的向量组（0 矩阵的列向量组），约定其极大无关组为空集，也可以理解为其没有极大线性无关组。

举例

- 对于所有向量都是零向量构成的向量组（0 矩阵的列向量组），约定其极大无关组为空集，也可以理解为其没有极大线性无关组。
- 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的极大无关组就是其自身。

举例

- 对于所有向量都是零向量构成的向量组（0 矩阵的列向量组），约定其极大无关组为空集，也可以理解为其没有极大线性无关组。
- 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的极大无关组就是其自身。
- $\mathbb{R}^2$ 中，$\alpha_1 = (1,0)^T$，$\alpha_2 = (0,1)^T$，$\alpha_3 = (1,1)^T$，则

举例

- 对于所有向量都是零向量构成的向量组（0 矩阵的列向量组），约定其极大无关组为空集，也可以理解为其没有极大线性无关组。
- 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的极大无关组就是其自身。
- $\mathbb{R}^2$ 中，$\alpha_1 = (1, 0)^T$，$\alpha_2 = (0, 1)^T$，$\alpha_3 = (1, 1)^T$，则
    - α_1, α_2 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组;

举例

- 对于所有向量都是零向量构成的向量组（0 矩阵的列向量组），约定其极大无关组为空集，也可以理解为其没有极大线性无关组。
- 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的极大无关组就是其自身。
- $\mathbb{R}^2$ 中，$\alpha_1 = (1, 0)^T$，$\alpha_2 = (0, 1)^T$，$\alpha_3 = (1, 1)^T$，则
  - α_1, α_2 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组；
  - α_1, α_3 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组；

举例

- 对于所有向量都是零向量构成的向量组（0 矩阵的列向量组），约定其极大无关组为空集，也可以理解为其没有极大线性无关组。
- 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的极大无关组就是其自身。
- $\mathbb{R}^2$ 中，$\alpha_1 = (1, 0)^T$，$\alpha_2 = (0, 1)^T$，$\alpha_3 = (1, 1)^T$，则
  - α_1, α_2 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组；
  - α_1, α_3 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组；
  - α_2, α_3 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大无关组。

极大无关组的基础求法

对于给定的向量组 $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$，

1. 初始化一个线性无关的子向量组 $R = \emptyset$;

极大无关组的基础求法

对于给定的向量组 $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$，

1. 初始化一个线性无关的子向量组 $R = \emptyset$；
2. 按从前到后的顺序检查每个向量 $\alpha_k, k = 1, \ldots, s$，

极大无关组的基础求法

对于给定的向量组 $S=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}$，

1. 初始化一个线性无关的子向量组 $R=\emptyset$；
2. 按从前到后的顺序检查每个向量 $\alpha_k, k=1,\ldots,s$，
   - 若 α_k 无法被当前的 R 中向量表示，则将 α_k 添加到 R 中，即 $R\leftarrow R\cup\{\alpha_k\}$（添加之后的子向量组 R 必然还是线性无关的）；

极大无关组的基础求法

对于给定的向量组 $S=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}$,

1. 初始化一个线性无关的子向量组 $R=\emptyset$;
2. 按从前到后的顺序检查每个向量 $\alpha_k, k=1,\ldots,s$,
   - 若 α_k 无法被当前的 R 中向量表示，则将 α_k 添加到 R 中，即 $R\leftarrow R\cup\{\alpha_k\}$（添加之后的子向量组 R 必然还是线性无关的）;
   - 否则，跳过 α_k。

极大无关组的性质

命题 2.2

向量组的任意一个线性无关子向量组均可扩展成为一个极大无关组。

极大无关组的性质

命题 2.2

向量组的任意一个线性无关子向量组均可扩展成为一个极大无关组。

定理 2.3

若 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的极大无关组，则

$$\langle \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r} \rangle = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle.$$

举例

例 2.4

设 $\alpha_1 = (2,1,3,0,4)^T$, $\alpha_2 = (-1,2,3,1,0)^T$, $\alpha_3 = (3,-1,0,-1,4)^T$,

举例

例 2.4

设 $\alpha_1=(2,1,3,0,4)^T$， $\alpha_2=(-1,2,3,1,0)^T$， $\alpha_3=(3,-1,0,-1,4)^T$，

1. 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组;

举例

例 2.4

设 $\alpha_1 = (2,1,3,0,4)^T$，$\alpha_2 = (-1,2,3,1,0)^T$，$\alpha_3 = (3,-1,0,-1,4)^T$，

1. 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大线性无关组；
2. 将其余向量表示为该极大无关组的线性组合。

目录

向量组等价

定义 3.1

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 都是 $\mathbb{F}^m$ 中的向量组。若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 中的每个向量都可由 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 线性表出，则称向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 线性表出；若向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 和向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 可以互相线性表出，则称向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 等价。

线性表出的矩阵表示

命题 3.2

向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 线性表出等价于存在 $A \in \mathbb{F}^{t\times s}$，使得

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = (\beta_1, \ldots, \beta_t)A.$$

线性表出与生成子空间

定理 3.3

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 都是 $\mathbb{F}^m$ 中的向量组。则

线性表出与生成子空间

定理 3.3

设 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\dots,\beta_t$ 都是 $\mathbb{F}^m$ 中的向量组。则

1. $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\dots,\beta_t$ 线性表出的充分必要条件是

$$\langle\alpha_1,\dots,\alpha_s\rangle\subseteq\langle\beta_1,\dots,\beta_t\rangle.$$

线性表出与生成子空间

定理 3.3

设 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\dots,\beta_t$ 都是 $\mathbb{F}^m$ 中的向量组。则

1. $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\dots,\beta_t$ 线性表出的充分必要条件是
$$\langle\alpha_1,\dots,\alpha_s\rangle\subseteq\langle\beta_1,\dots,\beta_t\rangle.$$
2. 向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\dots,\beta_t$ 等价的充分必要条件是
$$\langle\alpha_1,\dots,\alpha_s\rangle=\langle\beta_1,\dots,\beta_t\rangle.$$

向量组等价的等价性

1. **反身性：** $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ **与** $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ **等价；**

向量组等价的等价性

1. 反身性：$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 与 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 等价；
2. 对称性：若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 等价，则 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 与 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 等价；

向量组等价的等价性

1. 反身性：$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 与 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 等价；
2. 对称性：若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 等价，则 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 与 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 等价；
3. 传递性：若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \ldots, \beta_t$ 等价，$\beta_1, \ldots, \beta_t$ 与 $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ 等价，则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 与 $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ 等价。

无关组的向量个数

定理 3.4

向量组和其极大线性无关组等价。

无关组的向量个数

定理 3.4

向量组和其极大线性无关组等价。

引理 3.5

如果向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 可以由 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 线性表出，且 $s>t$，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 必线性相关。
等价的，如果向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 可以由 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 线性表出，且向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，则 $s\le t$。

无关组的向量个数

定理 3.4

向量组和其极大线性无关组等价。

引理 3.5

如果向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 可以由 $\beta_1, \dots, \beta_t$ 线性表出，且 $s > t$，则 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 必线性相关。
等价的，如果向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 可以由 $\beta_1, \dots, \beta_t$ 线性表出，且向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关，则 $s \le t$。

定理 3.6

两个等价的线性无关向量组所含向量个数相等。

秩

定义 3.7

向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的极大无关组所含向量个数称为该向量组的秩，记为 $r(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$。

秩

定义 3.7

向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的极大无关组所含向量个数称为该向量组的秩，记为 $r(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$。

- 约定：零向量组成的向量组的秩为零。

秩

定义 3.7

向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 的极大无关组所含向量个数称为该向量组的秩，记为 $r(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$。

- 约定：零向量组成的向量组的秩为零。

定理 3.8

如果向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 线性表出，则

$$r(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\ldots,\beta_t).$$

秩

定义 3.7

向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 的极大无关组所含向量个数称为该向量组的秩，记为 $r(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$。

- 约定：零向量组成的向量组的秩为零。

定理 3.8

如果向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1,\dots,\beta_t$ 线性表出，则

$$r(\alpha_1,\dots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\dots,\beta_t).$$

推论 3.9

等价的向量组的秩相等。

向量组等价的充要条件

定理 3.10

向量组等价的充要条件

定理 3.10

1. 向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 可以由 $\beta_1,\dots,\beta_t$ 线性表出的充要条件是

$$r(\beta_1,\dots,\beta_t)=r(\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_t).$$

向量组等价的充要条件

定理 3.10

1. 向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 可以由 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 线性表出的充要条件是
$$r(\beta_1,\ldots,\beta_t)=r(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_1,\ldots,\beta_t).$$
2. 向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 等价的充要条件是
$$r(\beta_1,\ldots,\beta_t)=r(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_1,\ldots,\beta_t)=r(\alpha_1,\ldots,\alpha_s).$$

目录

列秩与行秩

定义 4.1

矩阵 A 列向量组的秩称为 A 的列秩。矩阵 A 行向量组的秩称为 A 的行秩。

列秩与行秩

定义 4.1

矩阵 A 列向量组的秩称为 A 的列秩。矩阵 A 行向量组的秩称为 A 的行秩。

定理 4.2

任一 $m \times n$ 矩阵 A 的列秩等于矩阵的秩 $r(A)$。

列秩与行秩

定义 4.1

矩阵 A 列向量组的秩称为 A 的列秩。矩阵 A 行向量组的秩称为 A 的行秩。

定理 4.2

任一 $m \times n$ 矩阵 A 的列秩等于矩阵的秩 $r(A)$。

定理 4.3

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，则

$$r(A) = r(A^T) = A\text{的行秩。}$$

满秩矩阵

命题 4.4

设 A 是 n 阶方阵，则下列命题等价：

满秩矩阵

命题 4.4

设 A 是 n 阶方阵，则下列命题等价：

1. $r(A) = n$;

满秩矩阵

命题 4.4

设 A 是 n 阶方阵，则下列命题等价：

1. $r(A) = n$;
2. A 可逆;

满秩矩阵

命题 4.4

设 A 是 n 阶方阵，则下列命题等价：

1. $r(A) = n$;
2. A 可逆;
3. $\det A \neq 0$;

满秩矩阵

命题 4.4

设 A 是 n 阶方阵，则下列命题等价：

1. $r(A) = n$;
2. A 可逆;
3. $\det A \neq 0$;
4. A 的列（行）向量组线性无关;

满秩矩阵

命题 4.4

设 A 是 n 阶方阵，则下列命题等价：

1. $r(A) = n$;
2. A 可逆；
3. $\det A \neq 0$;
4. A 的列（行）向量组线性无关；
5. A 的列（行）向量组的秩为 n。

秩的等价定义

定理 4.5

矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于其非 0 子式的最大阶数。即若 $r(A)=r$，则

秩的等价定义

定理 4.5

矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于其非 0 子式的最大阶数。即若 $r(A)=r$，则

1. 存在 A 的 r 阶子式不为 0;

秩的等价定义

定理 4.5

矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于其非 0 子式的最大阶数。即若 $r(A) = r$，则

1. 存在 A 的 r 阶子式不为 0;
2. A 的任意阶数超过 r 阶的子式 *(若存在)* 都为 0。

秩的等价定义

定理 4.5

矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于其非 0 子式的最大阶数。即若 $r(A)=r$，则

1. 存在 A 的 r 阶子式不为 0;
2. A 的任意阶数超过 r 阶的子式 *(若存在)* 都为 0。

命题 4.6

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，则下述均可作为 $r(A)$ 的等价定义:

秩的等价定义

定理 4.5

矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于其非 0 子式的最大阶数。即若 $r(A)=r$，则

1. 存在 A 的 r 阶子式不为 0;
2. A 的任意阶数超过 r 阶的子式 (若存在) 都为 0。

命题 4.6

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，则下述均可作为 $r(A)$ 的等价定义:

1. 线性方程组 $AX=0$ 中的有效方程个数，即 A 的简化阶梯形中非 0 行行数;

秩的等价定义

定理 4.5

矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于其非 0 子式的最大阶数。即若 $r(A)=r$，则

1. 存在 A 的 r 阶子式不为 0;
2. A 的任意阶数超过 r 阶的子式 (若存在) 都为 0。

命题 4.6

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，则下述均可作为 $r(A)$ 的等价定义:

1. 线性方程组 $AX=0$ 中的有效方程个数，即 A 的简化阶梯形中非 0 行行数;
2. A 的列向量组的秩，即列向量组极大无关组中含有的向量个数;

秩的等价定义

定理 4.5

矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于其非 0 子式的最大阶数。即若 $r(A)=r$，则

1. 存在 A 的 r 阶子式不为 0；
2. A 的任意阶数超过 r 阶的子式 (若存在) 都为 0。

命题 4.6

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，则下述均可作为 $r(A)$ 的等价定义：

1. 线性方程组 $AX=0$ 中的有效方程个数，即 A 的简化阶梯形中非 0 行行数；
2. A 的列向量组的秩，即列向量组极大无关组中含有的向量个数；
3. A 的行向量组的秩，即行向量组极大无关组中含有的向量个数；

秩的等价定义

定理 4.5

矩阵 A 的秩 $r(A)$ 等于其非 0 子式的最大阶数。即若 $r(A)=r$，则

1. 存在 A 的 r 阶子式不为 0；
2. A 的任意阶数超过 r 阶的子式 (若存在) 都为 0。

命题 4.6

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，则下述均可作为 $r(A)$ 的等价定义：

1. 线性方程组 $AX=0$ 中的有效方程个数，即 A 的简化阶梯形中非 0 行行数；
2. A 的列向量组的秩，即列向量组极大无关组中含有的向量个数；
3. A 的行向量组的秩，即行向量组极大无关组中含有的向量个数；
4. A 非 0 子式的最大阶数。

秩的不等式

例 4.7

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，证明：$r(A) \leq \min\{m, n\}$。

秩的不等式

例 4.7

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，证明：$r(A) \leq \min\{m, n\}$。

例 4.8

证明：$\max\{r(A), r(B)\} \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$。

秩的不等式

例 4.7

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，证明：$r(A) \le \min\{m, n\}$。

例 4.8

证明：$\max\{r(A), r(B)\} \le r(A, B) \le r(A) + r(B)$。

例 4.9

证明：$r(A + B) \le r(A) + r(B)$。

秩的不等式

例 4.7

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，证明：$r(A) \leq \min\{m, n\}$。

例 4.8

证明：$\max\{r(A), r(B)\} \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$。

例 4.9

证明：$r(A + B) \leq r(A) + r(B)$。

例 4.10

证明：$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$。

Sylvester 不等式

定理 4.11

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，$B \in \mathbb{F}^{n\times s}$，则

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$$