§4.2 线性相关与线性无关

高等代数 https://gdfzu.club

目录

线性相关/无关的概念

定义 1.1

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是 $\mathbb{F}^m$ 中的列向量组。若存在不全为 0 的系数 $c_1, \ldots, c_n$，使得

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \mathbf{0},$$

则称列向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性相关。

线性相关/无关的概念

定义 1.1

设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 是 $\mathbb{F}^m$ 中的列向量组。若存在不全为 *0* 的系数 $c_1,\ldots,c_n$，使得

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n=\mathbf{0},$$

则称列向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性相关。

定义 1.2

设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 是 $\mathbb{F}^m$ 中的列向量组。若

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n=\mathbf{0}$$

当且仅当

$$c_1=\cdots=c_n=0,$$

则称列向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$线性无关。

例子与应用

例 1.3

在 $\mathbb{R}^3$ 中，证明：

例子与应用

例 1.3

在 $\mathbb{R}^3$ 中，证明：

1. 向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (-2, -4, -2)^T$ 线性相关；

例子与应用

例 1.3

在 $\mathbb{R}^3$ 中，证明：

1. 向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (-2, -4, -2)^T$ 线性相关；
2. 向量组 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (0, 0, 1)^T$ 线性无关。

例子与应用

例 1.3

在 $\mathbb{R}^3$ 中，证明：

1. 向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (-2, -4, -2)^T$ 线性相关；
2. 向量组 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (0, 0, 1)^T$ 线性无关。

定理 1.4

设矩阵 A 的列向量组为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$。若线性方程组 $AX = \beta$ 有解，则 $AX = \beta$ 有唯一解的充分必要条件是 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关。

应用与举例

推论 1.5

设矩阵 A 的列向量组为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$。则 $AX = 0$ 有唯一解的充分必要条件是 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关。此时的唯一解为全 *0* 解。

应用与举例

推论 1.5

设矩阵 A 的列向量组为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$。则 $AX=0$ 有唯一解的充分必要条件是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性无关。此时的唯一解为全 *0* 解。

例 1.6

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{F}^m$ 线性无关，

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1,$$

证明：向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关。

目录

几何性质

例 2.1

在几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中，判断下列向量组是否线性相关，并借助数学软件观察其几何性质。

几何性质

例 2.1

在几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中，判断下列向量组是否线性相关，并借助数学软件观察其几何性质。

1. 向量 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T, \alpha_2 = (2, -2, 2)^T$；

几何性质

例 2.1

在几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中，判断下列向量组是否线性相关，并借助数学软件观察其几何性质。

1. 向量 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T, \alpha_2 = (2, -2, 2)^T$;
2. 向量 $\beta_1 = (1, -1, 1)^T, \beta_2 = (0, 1, 0)^T, \beta_3 = (1, 1, 1)^T$;

几何性质

例 2.1

在几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中，判断下列向量组是否线性相关，并借助数学软件观察其几何性质。

1. 向量 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T, \alpha_2 = (2, -2, 2)^T$;
2. 向量 $\beta_1 = (1, -1, 1)^T, \beta_2 = (0, 1, 0)^T, \beta_3 = (1, 1, 1)^T$;
3. 向量

$$\gamma_1 = (1, -1, 1)^T, \gamma_2 = (1, 0, 0)^T, \gamma_3 = (1, 1, 2)^T, \gamma_4 = (3, 2, 1)^T.$$

几何性质

命题 2.2

设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$，则

几何性质

命题 2.2

设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$，则

1. 一个列向量 α 线性相关的充分必要条件是 $\alpha = \mathbf{0}$;

几何性质

命题 2.2

设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$，则

1. 一个列向量 α 线性相关的充分必要条件是 $\alpha = \mathbf{0}$;
2. 两个列向量 α 和 β 线性相关的充要条件是 α 和 β 共线;

几何性质

命题 2.2

设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$，则

1. 一个列向量 α 线性相关的充分必要条件是 $\alpha = \mathbf{0}$;
2. 两个列向量 α 和 β 线性相关的充要条件是 α 和 β 共线;
3. 三个列向量 α、β 和 γ 线性相关的充要条件是 α、β 和 γ 共面;

几何性质

命题 2.2

设 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$，则

1. 一个列向量 α 线性相关的充分必要条件是 $\alpha = \mathbf{0}$；
2. 两个列向量 α 和 β 线性相关的充要条件是 α 和 β 共线；
3. 三个列向量 α、β 和 γ 线性相关的充要条件是 α、β 和 γ 共面；
4. $\mathbb{R}^3$ 中任意 4 个向量都是线性相关的。

$\mathbb{F}^m$ 中的线性相关/无关

例 2.3

在 $\mathbb{F}^4$ 中，判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是否线性相关。若是，试写出一个关系式。

$\mathbb{F}^m$ 中的线性相关/无关

例 2.3

在 $\mathbb{F}^4$ 中，判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是否线性相关。若是，试写出一个关系式。

1. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

$\mathbb{F}^m$ 中的线性相关/无关

例 2.3

在 $\mathbb{F}^4$ 中，判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是否线性相关。若是，试写出一个关系式。

1. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
2. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$。

无关/相关的字面含义

定理 2.4

向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n (n \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量是其余向量的线性组合。

向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n (n \geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是其中任何一个向量 α_i 都不是其余向量的线性组合。

无关/相关的字面含义

定理 2.4

向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n (n \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量是其余向量的线性组合。
向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n (n \geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是其中任何一个向量 α_i 都不是其余向量的线性组合。

定理 2.5

若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是线性相关向量组，则任一包含该组向量的向量组必线性相关（部分线性相关，整体线性相关）。
若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是线性无关向量组，则从该向量组中任意取出一组向量必线性无关（整体线性无关，部分线性无关）。

线性无关/相关的性质

定理 2.6

设 $\alpha_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi})^T$，$i = 1, \ldots, n$ 是 $\mathbb{F}^m$ 中的向量组。该向量组中的每个向量在相同位置上加上 k 个分量，得到一个新的向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_n$，即对 $\forall i = 1, \ldots, n$,

$$\beta_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi}, a_{m+1,i}, \ldots, a_{m+k,i})^T.$$

线性无关/相关的性质

定理 2.6

设 $\alpha_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi})^T$，$i = 1, \ldots, n$ 是 $\mathbb{F}^m$ 中的向量组。该向量组中的每个向量在相同位置上加上 k 个分量，得到一个新的向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_n$，即对 $\forall i = 1, \ldots, n$,

$$\beta_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi}, a_{m+1,i}, \ldots, a_{m+k,i})^T.$$

- 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关，则向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 线性无关（短向量线性无关，则加长向量线性无关）；

线性无关/相关的性质

定理 2.6

设 $\alpha_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi})^T$, $i = 1, \ldots, n$ 是 $\mathbb{F}^m$ 中的向量组。该向量组中的每个向量在相同位置上加上 k 个分量，得到一个新的向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_n$，即对 $\forall i = 1, \ldots, n$,

$$\beta_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi}, a_{m+1,i}, \ldots, a_{m+k,i})^T.$$

- 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关，则向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 线性无关（短向量线性无关，则加长向量线性无关）；
- 若 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 线性相关，则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性相关（长向量线性相关，则缩短向量线性相关）。

线性无关/相关的性质

定理 2.7

若 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，$\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性表出且表示法唯一。

目录

例子

例 3.1

判断向量组 $\alpha_1 = (1,0,0)^T, \alpha_2 = (2,3,0)^T, \alpha_3 = (3,4,5)^T$ 是否线性相关。

例子

例 3.1

判断向量组 $\alpha_1 = (1,0,0)^T, \alpha_2 = (2,3,0)^T, \alpha_3 = (3,4,5)^T$ 是否线性相关。

- **初等行变换不改变列向量组的线性关系**

判断向量组线性相关性的一般方法

1. 把列向量组拼成一个矩阵 A;

判断向量组线性相关性的一般方法

1. 把列向量组拼成一个矩阵 A;
2. 对矩阵 A 做行初等变换，化成阶梯形矩阵 B;

判断向量组线性相关性的一般方法

1. 把列向量组拼成一个矩阵 A；
2. 对矩阵 A 做行初等变换，化成阶梯形矩阵 B；
3. 若所得阶梯形矩阵 B 的非 0 行行数与向量个数相同，则原列向量组线性无关；否则，线性相关。

例子

例 3.2

判别向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

是否线性相关。

线性相关/无关与秩

定理 3.3

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}^m$，$A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$。则向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关当且仅当

$$r(A) = n.$$

线性相关/无关与秩

定理 3.3

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}^m$，$A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$。则向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关当且仅当

$$r(A) = n.$$

推论 3.4

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}^m$，$A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$。若

$$m < n,$$

则向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性相关。

线性相关/无关与行列式

命题 3.5

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F}^m$，记 $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$。则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性相关当且仅当 $\det A = 0$；等价地，$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性无关当且仅当 $\det A \neq 0$。

线性相关/无关与行列式

命题 3.5

设 $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in \mathbb{F}^m$，记 $A=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$。则 $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ 线性相关当且仅当 $\det A = 0$；等价地，$\alpha_1,\dots,\alpha_m$ 线性无关当且仅当 $\det A \neq 0$。

例 3.6

设 $\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T$，$\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T$，试讨论当 a,b 满足什么条件时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关?