§4 线性组合与列向量空间——线性方程组的列观点

§4.1 列向量空间 $\mathbb{F}^m$

高等代数 https://gdfzu.club

线性方程组的列观点

线性方程组的系数矩阵按列分块后可以被改写为:

$$x_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + x_n \cdot \alpha_n = \beta.$$

目录

基本定义

- $\mathbb{F}^m = \{(a_1, \ldots, a_m)^T | a_j \in \mathbb{F},\ j = 1, \ldots, m\}$

基本定义

- $\mathbb{F}^m = \{(a_1, \dots, a_m)^T | a_j \in \mathbb{F},\ j = 1, \dots, m\}$

- a_j 叫做 $(a_1, \dots, a_m)^T$ 的第 j 个分量或第 j 个坐标

基本定义

- $\mathbb{F}^m = \{(a_1, \ldots, a_m)^T | a_j \in \mathbb{F},\ j = 1, \ldots, m\}$

- a_j 叫做 $(a_1, \ldots, a_m)^T$ 的第 j 个分量或第 j 个坐标

- $(a_1, \ldots, a_m)^T = (b_1, \ldots, b_m)^T \iff a_j = b_j, \forall j = 1, \ldots, m.$

$\mathbb{F}^m$ 及其运算

- **加法：** $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m)^T$

$\mathbb{F}^m$ 及其运算

- **加法：** $\alpha+\beta=(a_1+b_1,\ldots,a_m+b_m)^T$
- **数乘：** $c\cdot\alpha=\alpha\cdot c=(ca_1,\ldots,ca_m)^T$

$\mathbb{F}^m$ 及其运算

- **加法**：$\alpha+\beta=(a_1+b_1,\ldots,a_m+b_m)^T$
- **数乘**：$c\cdot\alpha=\alpha\cdot c=(ca_1,\ldots,ca_m)^T$

定义 1.1

数域 $\mathbb{F}$ 上所有 m 元有序组构成的集合 $\mathbb{F}^m$，连同定义在其上的加法 $(+)$ 运算和数乘 $(\cdot)$ 运算一起，称为数域 $\mathbb{F}$ 上的 m 维列向量空间，记为 $(\mathbb{F}^m,+,\cdot)$。

$\mathbb{F}^m$ 及其运算

- 加法：$\alpha+\beta=(a_1+b_1,\ldots,a_m+b_m)^T$
- 数乘：$c\cdot\alpha=\alpha\cdot c=(ca_1,\ldots,ca_m)^T$

定义 1.1

数域 $\mathbb{F}$ 上所有 m 元有序组构成的集合 $\mathbb{F}^m$，连同定义在其上的加法 $(+)$ 运算和数乘 $(\cdot)$ 运算一起，称为数域 $\mathbb{F}$ 上的 m 维列向量空间，记为 $(\mathbb{F}^m,+,\cdot)$。

- 列向量空间 $\mathbb{F}^m$ 中的元素称为 m 维列向量

线性组合

定义 1.2

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 都是 $\mathbb{F}^m$ 中的列向量，$c_1, \ldots, c_n$ 都是 $\mathbb{F}$ 中的数，称向量（或表达式）

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$$

为向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的一个线性组合；$c_1, \ldots, c_n$ 称为这个线性组合表达式的组合系数，或简称为线性组合的系数。

线性组合

定义 1.2

设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 都是 $\mathbb{F}^m$ 中的列向量，$c_1,\ldots,c_n$ 都是 $\mathbb{F}$ 中的数，称向量(或表达式)

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n$$

为向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的一个线性组合；$c_1,\ldots,c_n$ 称为这个线性组合表达式的组合系数，或简称为线性组合的系数。

若列向量 β 是向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 的一个线性组合，即存在 $c_j\in\mathbb{F}, j=1,\ldots,n$，使得

$$\beta=c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n,$$

则也称 β 可由向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性表出。

线性组合

定义 1.2

设 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 都是 $\mathbb{F}^m$ 中的列向量，$c_1,\dots,c_n$ 都是 $\mathbb{F}$ 中的数，称向量（或表达式）

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n$$

为向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 的一个线性组合；$c_1,\dots,c_n$ 称为这个线性组合表达式的组合系数，或简称为线性组合的系数。
若列向量 β 是向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 的一个线性组合，即存在 $c_j\in\mathbb{F}, j=1,\dots,n$，使得

$$\beta=c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n,$$

则也称 β 可由向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 线性表出。

- 线性运算；（狭义）线性空间

线性表示与方程组

例 1.3

设

$$\alpha_1 = (1, -1, 2, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 3, 2)^T, \alpha_3 = (1, 1, 8, 4)^T, \beta = (2, 1, 13, 6)^T,$$

试判断 β 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出。若能，写出它的一种表示方式。

目录

列向量空间的几何解释

- $\mathbb{R}^2$ 中的列向量与 xoy 平面中的点

列向量空间的几何解释

- $\mathbb{R}^2$ 中的列向量与 xoy 平面中的点
- 物理学中的“向量”与有向线段

列向量空间的几何解释

- $\mathbb{R}^2$ 中的列向量与 xoy 平面中的点
- 物理学中的“向量”与有向线段
- 向量的平移不变性

列向量空间的几何解释

- $\mathbb{R}^2$ 中的列向量与 xoy 平面中的点
- 物理学中的“向量”与有向线段
- 向量的平移不变性
- $$\mathbb{R}^2\text{中的列向量}\alpha \Leftrightarrow \text{坐标平面中的点}$$
  $$\Leftrightarrow \text{从坐标原点出发的有向箭头}\overrightarrow{\alpha}$$

线性运算的几何意义

- 数乘运算的几何意义：伸缩

线性运算的几何意义

- 数乘运算的几何意义：伸缩
- 向量加法的几何意义：平行四边形法则与三角形法则

线性运算的几何意义

- 数乘运算的几何意义：伸缩
- 向量加法的几何意义：平行四边形法则与三角形法则

例 2.1

设 $\alpha=(3,1)^T$，$\beta=(1,2)^T$，$\gamma=(-1,3)^T$。用几何方法求 c_1,c_2 使得

$$\gamma=c_1\alpha+c_2\beta.$$

目录

列向量的代数性质 (加法部分)

定理 3.1

设 α, β, γ 是 $\mathbb{F}^m$ 中任意的列向量，c, d 是 $\mathbb{F}$ 中任意的常数，则下述性质成立：

1. 加法封闭性：$\alpha + \beta \in \mathbb{F}^m$；
2. 加法交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$；
3. 加法结合律：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$；
4. 零元存在性：存在一个向量，记作 $\mathbf{0}$，使得对 $\forall \alpha \in \mathbb{F}^m$，
$$\mathbf{0} + \alpha = \alpha + \mathbf{0} = \alpha;$$
5. 负元存在性：对 $\forall \alpha \in \mathbb{F}^m$，存在一个向量，记作 $-\alpha$，满足
$$\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0};$$

列向量的代数性质 (数乘部分)

定理 3.2

设 α, β, γ 是 $\mathbb{F}^m$ 中任意的列向量，c, d 是 $\mathbb{F}$ 中任意的常数，则下述性质成立：

6. 数乘封闭性：$c\alpha \in \mathbb{F}^m$；
7. 向量加法对数乘的分配率：$c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$；
8. 数量加法对数乘的分配率：$(c + d)\alpha = c\alpha + d\alpha$；
9. $(cd)\alpha = c(d\alpha)$；
10. $1\alpha = \alpha$。

举例

例 3.3

利用定理中的 10 条性质证明下面的两个结论:

举例

例 3.3

利用定理中的 10 条性质证明下面的两个结论：

1. 证明：$\mathbb{F}^m$ 中的零元是唯一的，即：若 $\beta \in \mathbb{F}^m$ 满足对任意的 $\alpha \in \mathbb{F}^m$，都有
$$\beta + \alpha = \alpha + \beta = \alpha,$$
则 $\beta = \mathbf{0}$。

举例

例 3.3

利用定理中的 10 条性质证明下面的两个结论：

1. 证明：$\mathbb{F}^m$ 中的零元是唯一的，即：若 $\beta \in \mathbb{F}^m$ 满足对任意的 $\alpha \in \mathbb{F}^m$，都有
$$\beta + \alpha = \alpha + \beta = \alpha,$$
则 $\beta = \mathbf{0}$。
2. 证明：对任意的 $\alpha \in \mathbb{F}^m$，其负元是唯一的。

目录

行向量空间

- 记
$$\mathbb{F}_m = \{(a_1, \ldots, a_m) | a_j \in \mathbb{F},\ j = 1, \ldots, m\}.$$
称 $\mathbb{F}_m$ 的元素为数域 $\mathbb{F}$ 上的 m 维行向量。

行向量空间

- 记
$$\mathbb{F}_m = \{(a_1, \ldots, a_m) | a_j \in \mathbb{F},\ j = 1, \ldots, m\}.$$
称 $\mathbb{F}_m$ 的元素为数域 $\mathbb{F}$ 上的 m 维行向量。

- 一般向量见第 6 章。