

§3.3 行列式按行 (列) 展开

高等代数 <https://gdfzu.club>

目录

- 1 按一行（列）进行行列式展开
- 2 伴随矩阵——逆矩阵的公式表示
- 3 行列式按多行（列）的 Laplace 展开
- 4 分块矩阵的行列式

例：3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

例：3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
 - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

例：3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
 - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

例：3 阶行列式

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 = & \textcolor{red}{a_{11}a_{22}a_{33}} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
 & - \textcolor{blue}{a_{11}a_{32}a_{23}} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
 = & a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

例：3 阶行列式

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
 & - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
 = & a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

例：3 阶行列式

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
 & - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
 = & a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

例：3 阶行列式

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
 & - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
 = & a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

例：3 阶行列式

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
 & - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
 = & a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

代数余子式

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
 a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
 a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
 \end{vmatrix}$$

代数余子式

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
 a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
 a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
 \end{vmatrix}$$

代数余子式

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
 a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
 a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
 \end{vmatrix}$$

代数余子式

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
 a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
 a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
 \end{vmatrix}$$

代数余子式

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
 a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
 a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
 \end{vmatrix}$$

代数余子式

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
 a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
 \end{vmatrix}$$

代数余子式

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
 a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
 \end{vmatrix} \triangleq M_{ij}$$

代数余子式

$$(-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \triangleq A_{ij}$$

代数余子式

$$(-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \triangleq A_{ij}$$

- 记 $A_{ij} \triangleq (-1)^{i+j} M_{ij}$, 称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

行列式按行展开公式

引理 1.1

设 $(i_1, \dots, i_n)$ 是 $1, \dots, n$ 的一个排列, 则

$$\tau(i_1, \dots, i_n) = \tau(i_2, \dots, i_n) + i_1 - 1.$$

行列式按行展开公式

引理 1.1

设 $(i_1, \dots, i_n)$ 是 $1, \dots, n$ 的一个排列, 则

$$\tau(i_1, \dots, i_n) = \tau(i_2, \dots, i_n) + i_1 - 1.$$

定理 1.1

设 A 是 n 阶方阵, i 是任意一个小于等于 n 的正整数。则行列式 $\det A$ 等于它的所有第 i 行元素与其代数余子式的乘积之和, 即

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (1.1)$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.. \quad (1.2)$$

行列式按行展开公式

引理 1.1

设 $(i_1, \dots, i_n)$ 是 $1, \dots, n$ 的一个排列, 则

$$\tau(i_1, \dots, i_n) = \tau(i_2, \dots, i_n) + i_1 - 1.$$

定理 1.1

设 A 是 n 阶方阵, i 是任意一个小于等于 n 的正整数。则行列式 $\det A$ 等于它的所有第 i 行元素与其代数余子式的乘积之和, 即

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (1.1)$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.. \quad (1.2)$$

- (1.1)、(1.2) 均称为 n 阶行列式 $\det A$ 的第 i 行展开式

行列式按列展开公式

定理 1.2

设 A 是 n 阶方阵, j 是任意一个小于等于 n 的正整数。则行列式 $\det A$ 等于它的所有第 j 列元素与其代数余子式的乘积之和, 即

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (1.3)$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \quad (1.4)$$

行列式按列展开公式

定理 1.2

设 A 是 n 阶方阵, j 是任意一个小于等于 n 的正整数。则行列式 $\det A$ 等于它的所有第 j 列元素与其代数余子式的乘积之和, 即

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (1.3)$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \quad (1.4)$$

- (1.1)、(1.2) 均称为 n 阶行列式 $\det A$ 的第 i 行展开式

例题

例 1

计算 n 阶行列式 ($n > 1$):

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

递推法计算行列式

例 2

计算 n 阶行列式 ($n \geq 2$):

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & & & & & b_n \\ -1 & \lambda & & & & b_{n-1} \\ & -1 & \lambda & & & b_{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & \lambda & b_2 \\ & & & & -1 & \lambda + b_1 \end{vmatrix}.$$

Vandermonde 行列式

例 3

证明： n 阶 Vandermonde（范德蒙德）行列式 ($n \geq 2$)

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

Vandermonde 行列式

例 3

证明： n 阶 Vandermonde（范德蒙德）行列式 ($n \geq 2$)

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

• Vandermonde 行列式与插值多项式

目录

- 1 按一行（列）进行行列式展开
- 2 伴随矩阵——逆矩阵的公式表示
- 3 行列式按多行（列）的 Laplace 展开
- 4 分块矩阵的行列式

重要公式

引理 2.1

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个 n 阶方阵, 则

$$a_{k1}A_{i1} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} \det A, & \text{当 } k = i \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } k \neq i \text{ 时;} \end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j} + \cdots + a_{nl}A_{nj} = \begin{cases} \det A, & \text{当 } l = j \text{ 时,} \\ 0. & \text{当 } l \neq j \text{ 时.} \end{cases}$$

伴随矩阵

定义 2.1

设 A 为 n 阶方阵, A_{ij} 为 A 的第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的代数余子式, 称矩阵 $(A_{ji})_{n \times n}$ 为 A 的伴随矩阵, 记做 $\text{adj}A$ (或 A^*), 即

$$\text{adj}A = A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{n,n-1} \\ A_{1n} & \cdots & A_{n-1,n} & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

伴随矩阵

定义 2.1

设 A 为 n 阶方阵, A_{ij} 为 A 的第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的代数余子式, 称矩阵 $(A_{ji})_{n \times n}$ 为 A 的伴随矩阵, 记做 $\text{adj}A$ (或 A^*), 即

$$\text{adj}A = A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{n,n-1} \\ A_{1n} & \cdots & A_{n-1,n} & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

定理 2.1

$$A \cdot \text{adj}A = \text{adj}A \cdot A = (\det A)E$$

伴随矩阵和逆矩阵

定理 2.2

A 可逆的充分必要条件是 $\det A \neq 0$ 。

当 $\det A \neq 0$ 时,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

伴随矩阵和逆矩阵

定理 2.2

A 可逆的充分必要条件是 $\det A \neq 0$ 。

当 $\det A \neq 0$ 时,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

推论 2.1

设 A 是 n 阶方阵, 则 $\det A \neq 0$ 当且仅当 A 的秩 $r(A)$ 等于 n 。

举例

例 4

证明矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵。

举例

例 4

证明矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵。

- 仅适合低阶行列式求逆

目录

- 1 按一行（列）进行行列式展开
- 2 伴随矩阵——逆矩阵的公式表示
- 3 行列式按多行（列）的 Laplace 展开
- 4 分块矩阵的行列式

k 阶子式

定义 3.1

在一个 n 阶行列式 $\det A$ 中任意选定第 i_1 行、第 i_2 行、 $\cdots$ 、第 i_k 行及第 j_1 列、第 j_2 列、 $\cdots$ 、第 j_k 列交点上的元，其

中 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ 、 $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ ，按原来 A 中相对位置构成一个 k 阶行列式，称此行列式为 A 的一个 k 阶子式，记为

$$A \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{i_{k-1} j_k} \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

k 阶余子式、代数余子式

定义 3.2

在 $\det A$ 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按照原来的次序组成的 $n - k$ 阶行列式 $M \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$ 称为 k 阶子式 $A \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$ 的余子式。相应的 k 阶代数余子式定义为

$$\hat{A} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

Laplace 定理 (按行展开)

定理 3.1

设 $\det A$ 是 n 阶行列式，在 $\det A$ 中任取 k 行，那么含于这 k 行的全部 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于 $\det A$ 。即若取定 k 行： $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ ，则

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} A \begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \hat{A} \begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

例

例 5

固定 1、3 两行，按照 Laplace 定理写出计算 4 阶行列式的公式。

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Laplace 定理的理解

推论 3.1

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \det A_1 \cdot \det A_2.$$

Laplace 定理的理解

推论 3.1

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \det A_1 \cdot \det A_2.$$

引理 3.1

一个 n 阶行列式 $\det A$ 的任一 k 阶子式与其代数余子式之积的每一项都是 $\det A$ 的展开式中的一项，**并且符号也一致。**

例子

例 6

求

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例子

例 7

求 $2n$ 阶行列式的值

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

例子

例 7

求 $2n$ 阶行列式的值

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \ddots & & & & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

解：

$$D_n = (-1)^{1+2n+1+2n} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} D_{n-1} = (a^2 - b^2)^n.$$

例子

例 8

求下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} A_{n \times n} & 0 \\ C_{m \times n} & B_{m \times m} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & A_{n \times n} \\ B_{m \times m} & C_{m \times n} \end{vmatrix}$$

Laplace 定理（按列展开）

定理 3.2

设 $\det A$ 是 n 阶行列式，在 $\det A$ 中任取 k 列，那么含于这 k 列的全部 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于 $\det A$ 。即若取定 k 列： $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ ，则

$$\det A = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} A \begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \hat{A} \begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

分块三角阵的行列式

命题 3.1

设 A 是一个分块下三角矩阵，即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & A_k \end{pmatrix},$$

其中 $A_1, \dots, A_k$ 都是方阵（阶数可以不同）。则

$$\det A = \prod_{j=1}^k \det A_j.$$

目录

- 1 按一行（列）进行行列式展开
- 2 伴随矩阵——逆矩阵的公式表示
- 3 行列式按多行（列）的 Laplace 展开
- 4 分块矩阵的行列式

块初等变换

例 4.1

设矩阵有分块形式 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 A 、 D 分别是 $r \times h$ 、 $s \times l$ 阶矩阵。
计算

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ K & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_h & 0 \\ L & E_l \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & N_{s \times s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & E_s \\ E_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

块初等变换

例 4.1

设矩阵有分块形式 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 A 、 D 分别是 $r \times h$ 、 $s \times l$ 阶矩阵。
计算

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ K & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_h & 0 \\ L & E_l \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & N_{s \times s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & E_s \\ E_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

命题 4.1

对分块矩阵做块矩阵的消法变换不改变行列式。

命题 4.1

设 A 是 m 阶可逆阵, D 是 n 阶方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

命题 4.1

设 A 是 m 阶可逆阵, D 是 n 阶方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

命题 4.1

设 A 是 m 阶可逆阵, D 是 n 阶方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

特别地, 若 A 可逆且 $AC = CA$, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

命题 4.1

设 A 是 m 阶可逆阵, D 是 n 阶方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.$$

特别地, 若 A 可逆且 $AC = CA$, 则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

- $D - CA^{-1}B$: A 的 Schur 补

爪形行列式

例 4.2

设 $a_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, 利用降阶公式计算 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}.$$

AB 与 BA

定理 4.1

设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵, B 是 $n \times m$ 阶矩阵, $m \geq n$ 。则

$$\det(\lambda E_m - AB) = \lambda^{m-n} \det(\lambda E_n - BA).$$

AB 与 BA

定理 4.1

设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵, B 是 $n \times m$ 阶矩阵, $m \geq n$. 则

$$\det(\lambda E_m - AB) = \lambda^{m-n} \det(\lambda E_n - BA).$$

例 4.3

求行列式

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 + 1 & \cdots & a_1 a_n + 1 \\ a_2 a_1 + 1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix}$$