§3.2 行列式与初等变换

高等代数 https://gdfzu.club

行列式定义计算的局限性

- 展开式定义的局限性：$n!$ 项求和

行列式定义计算的局限性

- 展开式定义的局限性：$n!$ 项求和
- 总运算量随 n 急剧增加

行列式定义计算的局限性

- 展开式定义的局限性：$n!$ 项求和
- 总运算量随 n 急剧增加
- 实际计算难以实现：$50! \approx 3 \times 10^{64}$，即便电脑每秒运算 10^{12} 次，也需 $> 10^{43}$ 年

行列式定义计算的局限性

- 展开式定义的局限性：$n!$ 项求和
- 总运算量随 n 急剧增加
- 实际计算难以实现：$50! \approx 3 \times 10^{64}$，即便电脑每秒运算 10^{12} 次，也需 $> 10^{43}$ 年
- 矩阵含大量 0 元素（如上三角矩阵），此时行列式为对角元乘积，无需展开所有项

行列式定义计算的局限性

- 展开式定义的局限性：$n!$ 项求和
- 总运算量随 n 急剧增加
- 实际计算难以实现：$50! \approx 3 \times 10^{64}$，即便电脑每秒运算 10^{12} 次，也需 $> 10^{43}$ 年
- 矩阵含大量 0 元素（如上三角矩阵），此时行列式为对角元乘积，无需展开所有项
- 利用初等变换化简矩阵

目录

互换变换前后矩阵元素的变化规律

- $A \xrightarrow{\text{交换第}s\text{行与第}t\text{行}} B$

互换变换前后矩阵元素的变化规律

- $A \xrightarrow{\text{交换第}s\text{行与第}t\text{行}} B$
- A 与 B 的元素满足:

互换变换前后矩阵元素的变化规律

- $A \xrightarrow{\text{交换第}s\text{行与第}t\text{行}} B$
- A 与 B 的元素满足：
  1. 当 $i \neq s$ 且 $i \neq t$ 时，$a_{ij} = b_{ij}$；

互换变换前后矩阵元素的变化规律

- $A \xrightarrow{\text{交换第}s\text{行与第}t\text{行}} B$
- A 与 B 的元素满足:
  1. 当 $i \neq s$ 且 $i \neq t$ 时，$a_{ij} = b_{ij}$；
  2. $a_{sj} = b_{tj}$，$a_{tj} = b_{sj}$

互换变换前后矩阵元素的变化规律

- $A \xrightarrow{\text{交换第}s\text{行与第}t\text{行}} B$
- A 与 B 的元素满足：
  1. 当 $i \neq s$ 且 $i \neq t$ 时，$a_{ij} = b_{ij}$；
  2. $a_{sj} = b_{tj}$，$a_{tj} = b_{sj}$
- 一般项 $(-1)^{\tau(j_1,\ldots,j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$ 如何变化?

交换前

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & \cdots & j_s & \cdots & j_t & \cdots & n \\
\hline
1 & a_{11} & \cdots & \cdots & * & \cdots & a_{1j_1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s & a_{s1} & \cdots & a_{sj_s} & \cdots & * & \cdots & a_{sn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
t & a_{t1} & \cdots & * & \cdots & a_{tj_t} & \cdots & a_{tn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nj_n} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{array}
$$

交换前

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & \cdots & j_s & \cdots & j_t & \cdots & n \\
\hline
1 & a_{11} & \cdots & \cdots & * & \cdots & a_{1j_1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s & a_{s1} & \cdots & a_{sj_s} & \cdots & * & \cdots & a_{sn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
t & a_{t1} & \cdots & * & \cdots & a_{tj_t} & \cdots & a_{tn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nj_n} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{array}
$$

交换后

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & \cdots & j_s & \cdots & j_t & \cdots & n \\
\hline
1 & a_{11} & \cdots & \cdots & * & \cdots & a_{1j_1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s & a_{t1} & \cdots & * & \cdots & a_{tj_t} & \cdots & a_{tn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
t & a_{s1} & \cdots & a_{sj_s} & \cdots & * & \cdots & a_{sn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nj_n} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{array}
$$

排列的对换

- $a_{1j_1} \dots a_{sj_s} \dots a_{tj_t} \dots a_{nj_n} \to a_{1j_1} \dots a_{tj_t} \dots a_{sj_s} \dots a_{nj_n}$

排列的对换

- $a_{1j_1}\dots a_{sj_s}\dots a_{tj_t}\dots a_{nj_n}\to a_{1j_1}\dots a_{tj_t}\dots a_{sj_s}\dots a_{nj_n}$
- $(j_1,\dots,j_s,\dots,j_t,\dots,j_n)\to(j_1,\dots,j_t,\dots,j_s,\dots,j_n)$

排列的对换

- $a_{1j_1}\dots a_{sj_s}\dots a_{tj_t}\dots a_{nj_n} \to a_{1j_1}\dots a_{tj_t}\dots a_{sj_s}\dots a_{nj_n}$
- $(j_1,\dots,j_s,\dots,j_t,\dots,j_n) \to (j_1,\dots,j_t,\dots,j_s,\dots,j_n)$

引理 1.1

对换改变排列的奇偶性

排列的对换

- $a_{1j_1}\dots a_{sj_s}\dots a_{tj_t}\dots a_{nj_n} \to a_{1j_1}\dots a_{tj_t}\dots a_{sj_s}\dots a_{nj_n}$
- $(j_1,\dots,j_s,\dots,j_t,\dots,j_n) \to (j_1,\dots,j_t,\dots,j_s,\dots,j_n)$

引理 1.1

对换改变排列的奇偶性

定理 1.1

设 A 是方阵，B 是 A 经一次行互换变换得到的矩阵，则 $\det A = -\det B$

排列的对换

- $a_{1j_1}\dots a_{sj_s}\dots a_{tj_t}\dots a_{nj_n}\to a_{1j_1}\dots a_{tj_t}\dots a_{sj_s}\dots a_{nj_n}$
- $(j_1,\dots,j_s,\dots,j_t,\dots,j_n)\to(j_1,\dots,j_t,\dots,j_s,\dots,j_n)$

引理 1.1

对换改变排列的奇偶性

定理 1.1

设 A 是方阵，B 是 A 经一次行互换变换得到的矩阵，则 $\det A=-\det B$

例 1

求互换矩阵 $E(i,j)$ 的行列式。

排列的对换

- $a_{1j_1}\dots a_{sj_s}\dots a_{tj_t}\dots a_{nj_n} \to a_{1j_1}\dots a_{tj_t}\dots a_{sj_s}\dots a_{nj_n}$
- $(j_1,\dots,j_s,\dots,j_t,\dots,j_n) \to (j_1,\dots,j_t,\dots,j_s,\dots,j_n)$

引理 1.1

对换改变排列的奇偶性

定理 1.1

设 A 是方阵，B 是 A 经一次行互换变换得到的矩阵，则 $\det A = -\det B$

例 1

求互换矩阵 $E(i,j)$ 的行列式。

- **推论：若方阵 A 存在相同两行，则** $\det A = 0$

倍法变换对行列式的影响

定理 1.2

将 n 阶方阵 A 的某一行数乘常数 c，得矩阵 B，则 $\det B = c\det A$。

倍法变换对行列式的影响

定理 1.2

将 n 阶方阵 A 的某一行数乘常数 c，得矩阵 B，则 $\det B = c\det A$。

例 2

求倍法矩阵 $E(i(c))$ 的行列式。

倍法变换对行列式的影响

定理 1.2

将 n 阶方阵 A 的某一行数乘常数 c，得矩阵 B，则 $\det B = c\det A$。

例 2

求倍法矩阵 $E(i(c))$ 的行列式。

- **推论：若行列式两行成比例，则行列式为** 0

倍法变换对行列式的影响

定理 1.2

将 n 阶方阵 A 的某一行数乘常数 c，得矩阵 B，则 $\det B = c\det A$。

例 2

求倍法矩阵 $E(i(c))$ 的行列式。

- **推论：若行列式两行成比例，则行列式为** 0
- **重要结论：** $\det(cA) = c^n \det A$ **（**n **为方阵** A **的阶数）**

倍法变换对行列式的影响

定理 1.2

将 n 阶方阵 A 的某一行数乘常数 c，得矩阵 B，则 $\det B = c\det A$。

例 2

求倍法矩阵 $E(i(c))$ 的行列式。

- **推论：若行列式两行成比例，则行列式为 0**
- **重要结论：**$\det(cA) = c^n \det A$（n **为方阵** A **的阶数**）
- **特殊情况：当** $c = 0$ **时，含全 0 行的矩阵行列式为 0（实际使用中** c **通常非 0）**

典型例题

例 3

设 A 是 n 阶反对称矩阵（n 为奇数），则 $\det A = 0$。

消法变换对行列式的影响

定理 1.3

设 A, B, C 为 n 阶方阵，C 的第 r 行是 A 与 B 第 r 行的和，其余行对应相同，则 $\det C = \det A + \det B$。

消法变换对行列式的影响

定理 1.3

设 A, B, C 为 n 阶方阵，C 的第 r 行是 A 与 B 第 r 行的和，其余行对应相同，则 $\det C = \det A + \det B$。

- **注：非** $C = A + B$ **时** $\det C = \det A + \det B$

消法变换对行列式的影响

定理 1.3

设 A, B, C 为 n 阶方阵，C 的第 r 行是 A 与 B 第 r 行的和，其余行对应相同，则 $\det C = \det A + \det B$。

- **注：非** $C = A + B$ **时** $\det C = \det A + \det B$

定理 1.4

行消法变换不改变矩阵的行列式。

消法变换对行列式的影响

定理 1.3

设 A, B, C 为 n 阶方阵，C 的第 r 行是 A 与 B 第 r 行的和，其余行对应相同，则 $\det C = \det A + \det B$。

- **注：非** $C = A + B$ **时** $\det C = \det A + \det B$

定理 1.4

行消法变换不改变矩阵的行列式。

例 4

求消法变换对应的初等矩阵 $E(i, j(c))$ 的行列式。

消法变换对行列式的影响

定理 1.3

设 A, B, C 为 n 阶方阵，C 的第 r 行是 A 与 B 第 r 行的和，其余行对应相同，则 $\det C = \det A + \det B$。

- **注：非** $C = A + B$ **时** $\det C = \det A + \det B$

定理 1.4

行消法变换不改变矩阵的行列式。

例 4

求消法变换对应的初等矩阵 $E(i, j(c))$ 的行列式。

- **因消法变换不改变行列式值，常作为行列式化简的核心手段**

目录

行列式与矩阵乘法

命题 2.1

设 P 是初等矩阵，A 是与 P 同阶的方阵，则 $\det(PA) = \det P \cdot \det A$

行列式与矩阵乘法

命题 2.1

设 P 是初等矩阵，A 是与 P 同阶的方阵，则 $\det(PA) = \det P \cdot \det A$

定理 2.1 (行列式乘法公式)

设 A, B 是同阶方阵，则 $\det(AB) = \det A \cdot \det B$。

行列式与矩阵乘法

命题 2.1

设 P 是初等矩阵，A 是与 P 同阶的方阵，则 $\det(PA) = \det P \cdot \det A$

定理 2.1 (行列式乘法公式)

设 A, B 是同阶方阵，则 $\det(AB) = \det A \cdot \det B$。

例 5

设 A 为 n 阶方阵，且 $AA^T = E_n$，则:

行列式与矩阵乘法

命题 2.1

设 P 是初等矩阵，A 是与 P 同阶的方阵，则 $\det(PA) = \det P \cdot \det A$

定理 2.1 (行列式乘法公式)

设 A, B 是同阶方阵，则 $\det(AB) = \det A \cdot \det B$。

例 5

设 A 为 n 阶方阵，且 $AA^T = E_n$，则:

- $\det A = 1$ 或 -1;

行列式与矩阵乘法

命题 2.1

设 P 是初等矩阵，A 是与 P 同阶的方阵，则 $\det(PA) = \det P \cdot \det A$

定理 2.1 (行列式乘法公式)

设 A, B 是同阶方阵，则 $\det(AB) = \det A \cdot \det B$。

例 5

设 A 为 n 阶方阵，且 $AA^T = E_n$，则:

- $\det A = 1$ 或 -1;
- 若 $\det A < 0$，则 $\det(E_n + A) = 0$。

目录

典型例题

例 6

计算下列 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

典型例题

例 6

计算下列 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

例 7 (爪形行列式)

设 $a_i \neq 0 \ (1 \leq i \leq n)$，计算 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}$$

典型例题

例 8

计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

行列式性质总结

1. 互换行列式的两列，行列式变号;
2. 若行列式中有相同的两列，则行列式为 0;
3. 某一列数乘 c，则行列式乘以 c;
4. 若行列式中存在全 0 列，则行列式为 0;
5. 若行列式中存在成比例的两列，则行列式为 0;
6. 若 C 的第 r 列可以拆成 A 的第 r 列与 B 的第 r 列的和，且三个矩阵中其它列的元素都对应一样，则

$$\det C = \det A + \det B.$$

7. 列消法变换不改变行列式的值。

目录

行列式公理化定义

定义 4.1

行列式 $\det : M(F) \to F$（$M(F)$ 为数域 F 上所有方阵集合）是满足以下性质的映射：

公理化定义与展开式定义的关系：

行列式公理化定义

定义 4.1

行列式 $\det : M(F) \to F$（$M(F)$ 为数域 F 上所有方阵集合）是满足以下性质的映射:

- 单位矩阵的行列式为 1，即 $\det E = 1$

公理化定义与展开式定义的关系:

行列式公理化定义

定义 4.1

行列式 $\det : M(F) \to F$（$M(F)$ 为数域 F 上所有方阵集合）是满足以下性质的映射：

- 单位矩阵的行列式为 1，即 $\det E = 1$
- 交换两行，行列式变为原来的相反数

公理化定义与展开式定义的关系：

行列式公理化定义

定义 4.1

行列式 $\det : M(F) \to F$（$M(F)$ 为数域 F 上所有方阵集合）是满足以下性质的映射：

- 单位矩阵的行列式为 1，即 $\det E = 1$
- 交换两行，行列式变为原来的相反数
- 用常数 c 数乘矩阵的某一行，新矩阵行列式为原行列式的 c 倍

公理化定义与展开式定义的关系：

行列式公理化定义

定义 4.1

行列式 $\det : M(F) \to F$ （$M(F)$ 为数域 F 上所有方阵集合）是满足以下性质的映射：

- 单位矩阵的行列式为 1，即 $\det E = 1$
- 交换两行，行列式变为原来的相反数
- 用常数 c 数乘矩阵的某一行，新矩阵行列式为原行列式的 c 倍
- 若 C 的第 r 行是 A 与 B 第 r 行的和，其余行对应相同，则 $\det C = \det A + \det B$

公理化定义与展开式定义的关系：

行列式公理化定义

定义 4.1

行列式 $\det : M(F) \to F$（$M(F)$ 为数域 F 上所有方阵集合）是满足以下性质的映射：

- 单位矩阵的行列式为 1，即 $\det E = 1$
- 交换两行，行列式变为原来的相反数
- 用常数 c 数乘矩阵的某一行，新矩阵行列式为原行列式的 c 倍
- 若 C 的第 r 行是 A 与 B 第 r 行的和，其余行对应相同，则 $\det C = \det A + \det B$

公理化定义与展开式定义的关系：

- **两者等价：由展开式定义可推出公理化定义的 4 条性质，反之亦然**

行列式公理化定义

定义 4.1

行列式 $\det : M(F) \to F$ （$M(F)$ 为数域 F 上所有方阵集合）是满足以下性质的映射：

- 单位矩阵的行列式为 1，即 $\det E = 1$
- 交换两行，行列式变为原来的相反数
- 用常数 c 数乘矩阵的某一行，新矩阵行列式为原行列式的 c 倍
- 若 C 的第 r 行是 A 与 B 第 r 行的和，其余行对应相同，则 $\det C = \det A + \det B$

公理化定义与展开式定义的关系：

- 两者等价：由展开式定义可推出公理化定义的 4 条性质，反之亦然
- 公理化定义更简洁：无需依赖排列的奇偶性，直接通过运算性质描述行列式

行列式的几何意义

- 1 阶行列式：对应“有向”线段的长度

行列式的几何意义

- 1 阶行列式：对应“有向”线段的长度
- 2 阶行列式：对应“有向”平行四边形的面积

行列式的几何意义

- 1 阶行列式：对应“有向”线段的长度
- 2 阶行列式：对应“有向”平行四边形的面积
- 3 阶行列式：对应“有向”平行六面体的体积