

§3.1 行列式的展开式定义

高等代数 <https://gdfzu.club>

目录

- ① 二阶、三阶行列式的定义
- ② 排列逆序数与行列式展开式定义
- ③ 行列式展开式定义的进一步讨论

引例

用消元法解线性方程组：

引例

用消元法解线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}$$

引例

用消元法解线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}$$

$$(1.1) \times a_{22}: a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22},$$

引例

用消元法解线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}$$

$$(1.1) \times a_{22}: a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(1.2) \times a_{12}: a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2.$$

引例

用消元法解线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}$$

$$(1.1) \times a_{22}: a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(1.2) \times a_{12}: a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2.$$

$(1.1) \times a_{22} - (1.2) \times a_{12}$ ，消去 x_2 得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12};$$

引例

用消元法解线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}$$

$$(1.1) \times a_{22}: a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(1.2) \times a_{12}: a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2.$$

$(1.1) \times a_{22} - (1.2) \times a_{12}$ ，消去 x_2 得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12};$$

引例

类似的，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21};$$

引例

类似的，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21};$$

引例

类似的，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21};$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，原方程有唯一解：

引例

类似的，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21};$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，原方程有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

引例

类似的，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21};$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，原方程有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

- $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 有特殊重要意义。

二阶行列式的定义

定义 1.1 (二阶行列式)

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 称 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为矩阵 A 的行列式, 记作

$$\det A \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

二阶行列式的定义

定义 1.1 (二阶行列式)

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 称 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为矩阵 A 的行列式, 记作

$$\det A \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- 一种便于记忆的『图示』法则

二阶行列式的定义

定义 1.1 (二阶行列式)

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 称 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为矩阵 A 的行列式, 记作

$$\det A \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- 一种便于记忆的『图示』法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

二阶行列式的定义

定义 1.1 (二阶行列式)

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 称 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为矩阵 A 的行列式, 记作

$$\det A \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- 一种便于记忆的『图示』法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

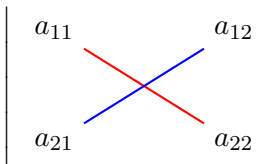
二阶行列式的定义

定义 1.1 (二阶行列式)

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 称 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为矩阵 A 的行列式, 记作

$$\det A \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- 一种便于记忆的『图示』法则



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

行列式与线性方程组的解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.3) \\ (1.4) \end{matrix}$$

当 $\det A \neq 0$ 时，方程组有唯一解：

行列式与线性方程组的解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

当 $\det A \neq 0$ 时，方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

行列式与线性方程组的解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

当 $\det A \neq 0$ 时，方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

行列式与线性方程组的解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

当 $\det A \neq 0$ 时，方程组有唯一解：

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

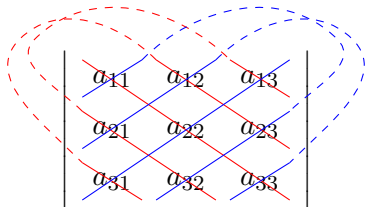
三阶行列式

定义 1.2

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 定义

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
 &\quad - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
 \end{aligned}$$

三阶行列式的计算



$$\begin{aligned}
 &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\
 &\quad - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
 \end{aligned}$$

三阶行列式

可以验证线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

的解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

一般性问题

对于一般的线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

是否有类似的结论？

目录

- 1 二阶、三阶行列式的定义
- 2 排列逆序数与行列式展开式定义
- 3 行列式展开式定义的进一步讨论

三阶行列式中的符号

- 和式中的一项： $+/- a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$

三阶行列式中的符号

- 和式中的一项: $+/- a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$
- j_1, j_2, j_3 是 $1, 2, 3$ 的排列

三阶行列式中的符号

- 和式中的一般项: $+/- a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$
- j_1, j_2, j_3 是 $1, 2, 3$ 的排列

Table 2.1: 排列与行列式定义式中的符号

一般项	排列	符号
$a_{11}a_{22}a_{33}$		
$a_{11}a_{23}a_{32}$		
$a_{12}a_{21}a_{33}$		
$a_{12}a_{23}a_{31}$		
$a_{13}a_{21}a_{32}$		
$a_{13}a_{22}a_{31}$		

三阶行列式中的符号

- 和式中的一般项: $+/- a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$
- j_1, j_2, j_3 是 $1, 2, 3$ 的排列

Table 2.1: 排列与行列式定义式中的符号

一般项	排列	符号
$a_{11}a_{22}a_{33}$	$1, 2, 3$	$+$
$a_{11}a_{23}a_{32}$		
$a_{12}a_{21}a_{33}$		
$a_{12}a_{23}a_{31}$		
$a_{13}a_{21}a_{32}$		
$a_{13}a_{22}a_{31}$		

三阶行列式中的符号

- 和式中的一般项: $+/- a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$
- j_1, j_2, j_3 是 $1, 2, 3$ 的排列

Table 2.1: 排列与行列式定义式中的符号

一般项	排列	符号
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	+
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 3, 2	-
$a_{12}a_{21}a_{33}$		
$a_{12}a_{23}a_{31}$		
$a_{13}a_{21}a_{32}$		
$a_{13}a_{22}a_{31}$		

三阶行列式中的符号

- 和式中的一般项: $+/- a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$
- j_1, j_2, j_3 是 $1, 2, 3$ 的排列

Table 2.1: 排列与行列式定义式中的符号

一般项	排列	符号
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	+
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 3, 2	-
$a_{12}a_{21}a_{33}$	2, 1, 3	-
$a_{12}a_{23}a_{31}$		
$a_{13}a_{21}a_{32}$		
$a_{13}a_{22}a_{31}$		

三阶行列式中的符号

- 和式中的一般项: $+/- a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$
- j_1, j_2, j_3 是 $1, 2, 3$ 的排列

Table 2.1: 排列与行列式定义式中的符号

一般项	排列	符号
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	+
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 3, 2	-
$a_{12}a_{21}a_{33}$	2, 1, 3	-
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2, 3, 1	+
$a_{13}a_{21}a_{32}$		
$a_{13}a_{22}a_{31}$		

三阶行列式中的符号

- 和式中的一般项: $+/- a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$
- j_1, j_2, j_3 是 $1, 2, 3$ 的排列

Table 2.1: 排列与行列式定义式中的符号

一般项	排列	符号
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	+
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 3, 2	-
$a_{12}a_{21}a_{33}$	2, 1, 3	-
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2, 3, 1	+
$a_{13}a_{21}a_{32}$	3, 1, 2	+
$a_{13}a_{22}a_{31}$		

三阶行列式中的符号

- 和式中的一般项: $+/- a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$
- j_1, j_2, j_3 是 $1, 2, 3$ 的排列

Table 2.1: 排列与行列式定义式中的符号

一般项	排列	符号
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	+
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 3, 2	-
$a_{12}a_{21}a_{33}$	2, 1, 3	-
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2, 3, 1	+
$a_{13}a_{21}a_{32}$	3, 1, 2	+
$a_{13}a_{22}a_{31}$	3, 2, 1	-

逆序数

定义 2.1

设整数 $j_1, \dots, j_m$ 两两不同, 在排列 $j_1, \dots, j_m$ 中,

逆序数

定义 2.1

设整数 $j_1, \dots, j_m$ 两两不同, 在排列 $j_1, \dots, j_m$ 中,

- 如果一对数中较大的数排在较小的数之前, 则称这对数是一个逆序。

逆序数

定义 2.1

设整数 $j_1, \dots, j_m$ 两两不同, 在排列 $j_1, \dots, j_m$ 中,

- 如果一对数中较大的数排在较小的数之前, 则称这对数是一个逆序。
- 一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数, 记为

$$\tau(j_1, \dots, j_m).$$

逆序数

定义 2.1

设整数 $j_1, \dots, j_m$ 两两不同, 在排列 $j_1, \dots, j_m$ 中,

- 如果一对数中较大的数排在较小的数之前, 则称这对数是一个逆序。
- 一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数, 记为

$$\tau(j_1, \dots, j_m).$$

- 若排列 $j_1, \dots, j_m$ 的逆序数为偶数 (含零), 则称之为偶排列;

逆序数

定义 2.1

设整数 $j_1, \dots, j_m$ 两两不同, 在排列 $j_1, \dots, j_m$ 中,

- 如果一对数中较大的数排在较小的数之前, 则称这对数是一个逆序。
- 一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数, 记为

$$\tau(j_1, \dots, j_m).$$

- 若排列 $j_1, \dots, j_m$ 的逆序数为偶数 (含零), 则称之为偶排列; 若排列 $j_1, \dots, j_m$ 的逆序数为奇数, 则称之为奇排列。

逆序数与符号

Table 2.2: 3 个数排列的逆序数与展开式中的符号

一般项	排列	符号	逆序	逆序数
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	+		
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 3, 2	-		
$a_{12}a_{21}a_{33}$	2, 1, 3	-		
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2, 3, 1	+		
$a_{13}a_{21}a_{32}$	3, 1, 2	+		
$a_{13}a_{22}a_{31}$	3, 2, 1	-		

逆序数与符号

Table 2.2: 3 个数排列的逆序数与展开式中的符号

一般项	排列	符号	逆序	逆序数
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	+	无	0
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 3, 2	-		
$a_{12}a_{21}a_{33}$	2, 1, 3	-		
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2, 3, 1	+		
$a_{13}a_{21}a_{32}$	3, 1, 2	+		
$a_{13}a_{22}a_{31}$	3, 2, 1	-		

逆序数与符号

Table 2.2: 3 个数排列的逆序数与展开式中的符号

一般项	排列	符号	逆序	逆序数
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	+	无	0
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 3, 2	-	(3, 2)	1
$a_{12}a_{21}a_{33}$	2, 1, 3	-		
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2, 3, 1	+		
$a_{13}a_{21}a_{32}$	3, 1, 2	+		
$a_{13}a_{22}a_{31}$	3, 2, 1	-		

逆序数与符号

Table 2.2: 3 个数排列的逆序数与展开式中的符号

一般项	排列	符号	逆序	逆序数
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	+	无	0
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 3, 2	-	(3, 2)	1
$a_{12}a_{21}a_{33}$	2, 1, 3	-	(2, 1)	1
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2, 3, 1	+		
$a_{13}a_{21}a_{32}$	3, 1, 2	+		
$a_{13}a_{22}a_{31}$	3, 2, 1	-		

逆序数与符号

Table 2.2: 3 个数排列的逆序数与展开式中的符号

一般项	排列	符号	逆序	逆序数
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	+	无	0
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 3, 2	-	(3, 2)	1
$a_{12}a_{21}a_{33}$	2, 1, 3	-	(2, 1)	1
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2, 3, 1	+	(2, 1); (3, 1)	2
$a_{13}a_{21}a_{32}$	3, 1, 2	+		
$a_{13}a_{22}a_{31}$	3, 2, 1	-		

逆序数与符号

Table 2.2: 3 个数排列的逆序数与展开式中的符号

一般项	排列	符号	逆序	逆序数
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	+	无	0
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 3, 2	-	(3, 2)	1
$a_{12}a_{21}a_{33}$	2, 1, 3	-	(2, 1)	1
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2, 3, 1	+	(2, 1); (3, 1)	2
$a_{13}a_{21}a_{32}$	3, 1, 2	+	(3, 1); (3, 2)	2
$a_{13}a_{22}a_{31}$	3, 2, 1	-		

逆序数与符号

Table 2.2: 3 个数排列的逆序数与展开式中的符号

一般项	排列	符号	逆序	逆序数
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	+	无	0
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 3, 2	-	(3, 2)	1
$a_{12}a_{21}a_{33}$	2, 1, 3	-	(2, 1)	1
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2, 3, 1	+	(2, 1); (3, 1)	2
$a_{13}a_{21}a_{32}$	3, 1, 2	+	(3, 1); (3, 2)	2
$a_{13}a_{22}a_{31}$	3, 2, 1	-	(3, 2); (3, 1); (2, 1)	3

行列式的展开式定义

定义 2.2

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个 n 阶方阵。则 A 的行列式，记做 $\det A$ 或 $|A|$ ，定义为：

$$\det A = |A| = \sum_{j_1, \dots, j_n} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}, \quad (2.1)$$

其中求和指标 $j_1, \dots, j_n$ 取遍 $1, \dots, n$ 的所有排列。

行列式的展开式定义

定义 2.2

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一个 n 阶方阵。则 A 的行列式，记做 $\det A$ 或 $|A|$ ，定义为：

$$\det A = |A| = \sum_{j_1, \dots, j_n} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}, \quad (2.1)$$

其中求和指标 $j_1, \dots, j_n$ 取遍 $1, \dots, n$ 的所有排列。

- 若 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ，则 $\det A \in \mathbb{F}$ 。

按定义计算行列式

例 1

求 $\det A$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

按定义计算行列式

例 2

求 $\det A$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

按定义计算行列式

例 3

求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数，其中

$$f(x) = \begin{vmatrix} 5x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

上三角矩阵的行列式

定理 2.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上三角矩阵的行列式

定理 2.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

上三角矩阵的行列式

定理 2.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

推论 2.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例子

例 4

$$\begin{vmatrix}
 & & & & a_{1,n} \\
 & & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
 a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n}
 \end{vmatrix}$$

例子

例 4

$$\begin{vmatrix}
 & & & & a_{1,n} \\
 & & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
 a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n}
 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} \cdots a_{n,1}.$$

例子

例 4

$$\begin{vmatrix}
 & & & & a_{1,n} \\
 & & & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
 a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n}
 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} \cdots a_{n,1}.$$

- 4 阶及 4 阶以上行列式不遵循对角线法则!

目录

- 1 二阶、三阶行列式的定义
- 2 排列逆序数与行列式展开式定义
- 3 行列式展开式定义的进一步讨论

行与列

- 一般项的两种写法: $a_{1j_1}, \dots, a_{nj_n} \leftrightarrow a_{i_1 1}, \dots, a_{i_n n}$

行与列

- 一般项的两种写法: $a_{1j_1}, \dots, a_{nj_n} \leftrightarrow a_{i_1 1}, \dots, a_{i_n n}$

引理 3.1

设 $a_{1j_1}, \dots, a_{nj_n}$ 和 $a_{i_1 1}, \dots, a_{i_n n}$ 是 n 阶行列式 $\det A$ 展开式同一个一般项中 n 个元素的两种不同排列方式, 则

$$\tau(j_1, \dots, j_n) = \tau(i_1, \dots, i_n).$$

行列式与转置

定理 3.1

对于任意方阵 A , A 与 A 转置有相同的行列式, 即

$$\det A = \det A^T, \forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

行列式与转置

定理 3.1

对于任意方阵 A , A 与 A 转置有相同的行列式, 即

$$\det A = \det A^T, \forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

- 行列式中, 行与列地位相同