\$2.7 列初等变换与相抵

高等代数 https://gdfzu.club

Outline

列初等变换

- 列互换变换：交换矩阵的两列；

列初等变换

- 列互换变换：交换矩阵的两列；
- 列倍法变换：将矩阵的一列乘以非 0 常数 c；

列初等变换

- 列互换变换：交换矩阵的两列；
- 列倍法变换：将矩阵的一列乘以非 0 常数 c；
- 列消法变换：将矩阵的第 j 列加上矩阵的第 i 列乘以常数 c。

列初等变换

- 列互换变换：交换矩阵的两列；
- 列倍法变换：将矩阵的一列乘以非 0 常数 c；
- 列消法变换：将矩阵的第 j 列加上矩阵的第 i 列乘以常数 c。
- 称这三种变换为矩阵的列初等变换，或初等列变换。

列初等变换

- 列互换变换：交换矩阵的两列；
- 列倍法变换：将矩阵的一列乘以非 0 常数 c；
- 列消法变换：将矩阵的第 j 列加上矩阵的第 i 列乘以常数 c。
- 称这三种变换为矩阵的列初等变换，或初等列变换。
- 列初等变换和行初等变换统称为初等变换。

列初等变换与矩阵乘法

- 纲领：左乘行变换，右乘列变换

列初等变换与矩阵乘法

- 纲领：左乘行变换，右乘列变换

定理 1.1

设 A 是任意给定的一个 $m \times n$ 阶矩阵。则

列初等变换与矩阵乘法

- 纲领：左乘行变换，右乘列变换

定理 1.1

设 A 是任意给定的一个 $m \times n$ 阶矩阵。则

1. $AE(i,j)$ 等于交换 A 的第 i、j 两列后所得矩阵;

列初等变换与矩阵乘法

- 纲领：左乘行变换，右乘列变换

定理 1.1

设 A 是任意给定的一个 $m \times n$ 阶矩阵。则

1. $AE(i,j)$ 等于交换 A 的第 i、j 两列后所得矩阵；
2. $AE(i(c))$ 等于将 A 的第 i 列乘以非 0 常数 c 后所得矩阵；

列初等变换与矩阵乘法

- 纲领：左乘行变换，右乘列变换

定理 1.1

设 A 是任意给定的一个 $m\times n$ 阶矩阵。则

1. $AE(i,j)$ 等于交换 A 的第 i、j 两列后所得矩阵；
2. $AE(i(c))$ 等于将 A 的第 i 列乘以非 0 常数 c 后所得矩阵；
3. $AE(i,j(c))$ 等于将 A 的第 j 列加上第 i 列乘以常数 c 后所得矩阵。

列初等变换与矩阵乘法

- 纲领：左乘行变换，右乘列变换

定理 1.1

设 A 是任意给定的一个 $m\times n$ 阶矩阵。则

1. $AE(i,j)$ 等于交换 A 的第 i、j 两列后所得矩阵；
2. $AE(i(c))$ 等于将 A 的第 i 列乘以非 0 常数 c 后所得矩阵；
3. $AE(i,j(c))$ 等于将 A 的第 j 列加上第 i 列乘以常数 c 后所得矩阵。

定理 1.2

矩阵 A 经过有限次列初等变换可以变成 B 的充分必要条件是：存在可逆矩阵 Q，使得

$$AQ=B.$$

Outline

相抵

定义 2.1

若矩阵 A 经过有限次初等变换后变成 B，则称 A 与 B相抵，记为 $A \simeq B$。

相抵

定义 2.1

若矩阵 A 经过有限次初等变换后变成 B，则称 A 与 B**相抵**，记为 $A \simeq B$。

定理 2.1

设 A、B 均为 $m \times n$ 阶矩阵，则下列叙述等价：

相抵

定义 2.1

若矩阵 A 经过有限次初等变换后变成 B，则称 A 与 B相抵，记为 $A \simeq B$。

定理 2.1

设 A、B 均为 $m \times n$ 阶矩阵，则下列叙述等价：

1. $A \simeq B$;

相抵

定义 2.1

若矩阵 A 经过有限次初等变换后变成 B，则称 A 与 B**相抵**，记为 $A \simeq B$。

定理 2.1

设 A、B 均为 $m \times n$ 阶矩阵，则下列叙述等价：

1. $A \simeq B$;
2. 存在初等矩阵 P_i，Q_j $\quad (i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, t)$ 使得

$$P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t = B;$$

相抵

定义 2.1

若矩阵 A 经过有限次初等变换后变成 B，则称 A 与 B相抵，记为 $A \simeq B$。

定理 2.1

设 A、B 均为 $m \times n$ 阶矩阵，则下列叙述等价：

1. $A \simeq B$;
2. 存在初等矩阵 P_i, Q_j $\quad (i = 1, \dots, s;\ j = 1, \dots, t)$ 使得
$$P_s \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_t = B;$$
3. 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得
$$PAQ = B.$$

相抵关系是等价关系

- 可以验证矩阵的相抵关系满足：

相抵关系是等价关系

- 可以验证矩阵的相抵关系满足:
  1. 反身性: $A \backsimeq A$;

相抵关系是等价关系

- 可以验证矩阵的相抵关系满足：
  1. 反身性：$A \simeq A$;
  2. 对称性：$A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$;

相抵关系是等价关系

- 可以验证矩阵的相抵关系满足：
  1. 反身性：$A \simeq A$;
  2. 对称性：$A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$;
  3. 传递性：$A \simeq B$、$B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$。

相抵关系是等价关系

- 可以验证矩阵的相抵关系满足：
  1. 反身性：$A \simeq A$；
  2. 对称性：$A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$；
  3. 传递性：$A \simeq B$、$B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$。

定理 2.2

任意矩阵 A 必相抵于 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $r = r(A)$。等价地，对于任意矩阵 $A_{m\times n}$，存在可逆矩阵 $P_{m\times m}$、$Q_{n\times n}$ 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

相抵关系是等价关系

- 可以验证矩阵的相抵关系满足：
  1. 反身性：$A \simeq A$；
  2. 对称性：$A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$；
  3. 传递性：$A \simeq B$、$B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$。

定理 2.2

任意矩阵 A 必相抵于 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $r = r(A)$。等价地，对于任意矩阵 $A_{m\times n}$，存在可逆矩阵 $P_{m\times m}$、$Q_{n\times n}$ 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$：相抵标准型

秩与相抵

- 秩：相抵不变量

秩与相抵

- 秩：相抵不变量

定理 2.3

设 A 和 B 是任意给定的 2 个 $m \times n$ 阶矩阵，则

秩与相抵

- 秩：相抵不变量

定理 2.3

设 A 和 B 是任意给定的 2 个 $m\times n$ 阶矩阵，则

1. $r(A)=r(A^T)$，即转置不改变矩阵的秩；

秩与相抵

- 秩：相抵不变量

定理 2.3

设 A 和 B 是任意给定的 2 个 $m \times n$ 阶矩阵，则

1. $r(A) = r(A^T)$，即转置不改变矩阵的秩；
2. 行初等变换不改变矩阵的秩，即对任意的 m 阶可逆矩阵 P，有 $r(PA) = r(A)$；

秩与相抵

- 秩：相抵不变量

定理 2.3

设 A 和 B 是任意给定的 2 个 $m \times n$ 阶矩阵，则

1. $r(A) = r(A^T)$，即转置不改变矩阵的秩；
2. 行初等变换不改变矩阵的秩，即对任意的 m 阶可逆矩阵 P，有 $r(PA) = r(A)$;
3. 列初等变换不改变矩阵的秩，即对任意的 n 阶可逆矩阵 Q，有 $r(AQ) = r(A)$;

秩与相抵

- 秩：相抵不变量

定理 2.3

设 A 和 B 是任意给定的 2 个 $m\times n$ 阶矩阵，则

1. $r(A)=r(A^T)$，即转置不改变矩阵的秩；
2. 行初等变换不改变矩阵的秩，即对任意的 m 阶可逆矩阵 P，有 $r(PA)=r(A)$;
3. 列初等变换不改变矩阵的秩，即对任意的 n 阶可逆矩阵 Q，有 $r(AQ)=r(A)$;
4. 若 C 是与 A 行等价的阶梯形矩阵，则 $r(A)$ 等于 C 的非 0 行行数;

秩与相抵

- 秩：相抵不变量

定理 2.3

设 A 和 B 是任意给定的 2 个 $m \times n$ 阶矩阵，则

1. $r(A) = r(A^T)$，即转置不改变矩阵的秩；
2. 行初等变换不改变矩阵的秩，即对任意的 m 阶可逆矩阵 P，有 $r(PA) = r(A)$；
3. 列初等变换不改变矩阵的秩，即对任意的 n 阶可逆矩阵 Q，有 $r(AQ) = r(A)$；
4. 若 C 是与 A 行等价的阶梯形矩阵，则 $r(A)$ 等于 C 的非 0 行行数；
5. $r(A) \leq \min\{m, n\}$，即矩阵的秩不超过行数和列数的最小值。

矩阵的两种常用分解方式

例 1 (秩一分解)

设矩阵 A 的秩为 r，求证存在 r 个秩全为 1 的同阶矩阵 $A_1, \ldots, A_r$，使得

$$A = A_1 + \cdots + A_r.$$

矩阵的两种常用分解方式

例 1 (秩一分解)

设矩阵 A 的秩为 r，求证存在 r 个秩全为 1 的同阶矩阵 $A_1, \ldots, A_r$，使得

$$A = A_1 + \cdots + A_r.$$

例 2 (满秩分解)

设 $m \times n$ 阶矩阵 A 的秩为 r，证明存在矩阵 $B_{m\times r}$、$C_{r\times n}$，使得 $A = BC$.

P, Q 的计算

例 3

将 $A=\begin{pmatrix}2&0&2&0\\1&2&0&0\\0&1&1&6\end{pmatrix}$ 化为相抵标准形，并写出相应初等矩阵。