

§ 2.6 简化阶梯形、线性方程组的解及秩

高等代数 <https://gdfzu.club>

Outline

- 1 简化阶梯形矩阵
- 2 利用简化阶梯形求解线性方程组
- 3 简化阶梯形的唯一性
- 4 矩阵的秩
- 5 再议可逆矩阵

简化阶梯形矩阵

定义 1.1

设 A 是一个 $m \times n$ 阶矩阵。若 A 满足下面 3 个条件：

则称矩阵 A 是一个简化阶梯形矩阵 (*reduced row echelon form*, 简记为 *rref*)。

简化阶梯形矩阵

定义 1.1

设 A 是一个 $m \times n$ 阶矩阵。若 A 满足下面 3 个条件：

- ① A 是阶梯形矩阵；

则称矩阵 A 是一个简化阶梯形矩阵 (*reduced row echelon form*, 简记为 *rref*)。

简化阶梯形矩阵

定义 1.1

设 A 是一个 $m \times n$ 阶矩阵。若 A 满足下面 3 个条件：

- ① A 是阶梯形矩阵；
- ② A 的主元都是 1；

则称矩阵 A 是一个简化阶梯形矩阵 (*reduced row echelon form*, 简记为 *rref*)。

简化阶梯形矩阵

定义 1.1

设 A 是一个 $m \times n$ 阶矩阵。若 A 满足下面 3 个条件：

- ① A 是阶梯形矩阵；
- ② A 的主元都是 1；
- ③ A 的任意一个主元所在的列除了主元 1 外，其余元素都是 0；

则称矩阵 A 是一个**简化阶梯形矩阵**(*reduced row echelon form*, 简记为 *rref*)。

简化阶梯形矩阵

定义 1.1

设 A 是一个 $m \times n$ 阶矩阵。若 A 满足下面 3 个条件：

- ① A 是阶梯形矩阵；
- ② A 的主元都是 1；
- ③ A 的任意一个主元所在的列除了主元 1 外，其余元素都是 0；

则称矩阵 A 是一个**简化阶梯形矩阵**(*reduced row echelon form*, 简记为 *rref*)。

定理 1.1

每一个矩阵都行等价于一个简化阶梯形矩阵。

简化阶梯型的计算

例 1

用初等行变换将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ 化为简化阶梯形矩阵。

Outline

- 1 简化阶梯形矩阵
- 2 利用简化阶梯形求解线性方程组
- 3 简化阶梯形的唯一性
- 4 矩阵的秩
- 5 再议可逆矩阵

Gauss-Jordan 消去法

- $AX = \beta \Rightarrow \tilde{A} = (A, \beta)$

Gauss-Jordan 消去法

$$\bullet AX = \beta \Rightarrow \tilde{A} = (A, \beta)$$

$$\bullet \tilde{A} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan 消去法

- 若 $b'_{r+1} \neq 0$, 则无解;

Gauss-Jordan 消去法

- 若 $b'_{r+1} \neq 0$, 则无解;
- 若 $b'_{r+1} = 0$, 对增广矩阵继续作行的初等变换

Gauss-Jordan 消去法

- 若 $b'_{r+1} \neq 0$, 则无解;
- 若 $b'_{r+1} = 0$, 对增广矩阵继续作行的初等变换

Gauss-Jordan 消去法

- 若 $b'_{r+1} \neq 0$, 则无解;
- 若 $b'_{r+1} = 0$, 对增广矩阵继续作行的初等变换

$$\tilde{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

情形 1: $r = n$ 唯一解

- 当 $r = n$ 时, 对应的阶梯形线性方程组

$$\begin{cases} x_1 & & & = d_1 \\ & x_2 & & = d_2 \\ & & \dots & \\ & & & x_n = d_n \end{cases}$$

情形 1: $r = n$ 唯一解

- 当 $r = n$ 时, 对应的阶梯形线性方程组

$$\begin{cases} x_1 & & & = d_1 \\ & x_2 & & = d_2 \\ & & \cdots & \\ & & & x_n = d_n \end{cases}$$

此时, 线性方程组有**唯一解**

$$\begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_2 = d_2 \\ \cdots \\ x_n = d_n \end{cases}.$$

情形 2: $r < n$ 无穷多解

- 当 $r < n$, 这时阶梯形方程组可化为

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & & = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1,n}x_n \\ & x_2 & = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2,n}x_n \\ & & \ddots \\ & & x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{r,n}x_n \end{array} \right. \quad (1)$$

情形 2: $r < n$ 无穷多解

- 当 $r < n$, 这时阶梯形方程组可化为

$$\begin{cases} x_1 & = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1,n}x_n \\ x_2 & = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2,n}x_n \\ & \ddots \\ x_r & = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{r,n}x_n \end{cases} \quad (1)$$

任意给 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 一组值, 由 (1) 就唯一地定出 $x_1, \cdots, x_r$ 的一组值。此时方程组有无穷多个解。

情形 2: $r < n$ 无穷多解

- 当 $r < n$, 这时阶梯形方程组可化为

$$\begin{cases} x_1 & = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1,n}x_n \\ x_2 & = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2,n}x_n \\ & \ddots \\ x_r & = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{r,n}x_n \end{cases} \quad (1)$$

任意给 $x_{r+1}, \dots, x_n$ 一组值, 由 (1) 就唯一地定出 $x_1, \dots, x_r$ 的一组值。此时方程组有无穷多个解。

- 我们把 $x_1, \dots, x_r$ 通过 $x_{r+1}, \dots, x_n$ 表示出来的这样一组解的表达式称为该方程组的一般解。

情形 2: $r < n$ 无穷多解

- 当 $r < n$, 这时阶梯形方程组可化为

$$\begin{cases} x_1 & = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1,n}x_n \\ x_2 & = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2,n}x_n \\ & \ddots \\ x_r & = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{r,n}x_n \end{cases} \quad (1)$$

任意给 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 一组值, 由 (1) 就唯一地定出 $x_1, \cdots, x_r$ 的一组值。此时方程组有无穷多个解。

- 我们把 $x_1, \cdots, x_r$ 通过 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 表示出来的这样一组解的表达式称为该方程组的一般解。
- $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 称为一组自由未知量。

情形 2: $r < n$ 无穷多解

- 当 $r < n$, 这时阶梯形方程组可化为

$$\begin{cases} x_1 & = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1,n}x_n \\ x_2 & = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2,n}x_n \\ & \ddots \\ x_r & = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{r,n}x_n \end{cases} \quad (1)$$

任意给 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 一组值, 由 (1) 就唯一地定出 $x_1, \cdots, x_r$ 的一组值。此时方程组有无穷多个解。

- 我们把 $x_1, \cdots, x_r$ 通过 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 表示出来的这样一组解的表达式称为该方程组的一般解。
- $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 称为一组自由未知量。
- $x_1, \cdots, x_r$ 称为一组主变量。

算例

例 2

利用 Gauss-Jordan 消去法求解线性方程组：

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Outline

- 1 简化阶梯形矩阵
- 2 利用简化阶梯形求解线性方程组
- 3 简化阶梯形的唯一性
- 4 矩阵的秩
- 5 再议可逆矩阵

简化阶梯形的唯一性

引理 3.1

设 B 和 C 都是 $m \times n$ 阶的简化阶梯形矩阵。则 $BX = 0$ 与 $CX = 0$ 这两个线性方程组同解的充分必要条件是 $B = C$ 。

简化阶梯形的唯一性

引理 3.1

设 B 和 C 都是 $m \times n$ 阶的简化阶梯形矩阵。则 $BX = 0$ 与 $CX = 0$ 这两个线性方程组同解的充分必要条件是 $B = C$ 。

- 称右端项为 0 的线性方程组，即形如 $AX = 0$ 的线性方程组，为齐次线性方程组。

简化阶梯形的唯一性

引理 3.1

设 B 和 C 都是 $m \times n$ 阶的简化阶梯形矩阵。则 $BX = 0$ 与 $CX = 0$ 这两个线性方程组同解的充分必要条件是 $B = C$ 。

- 称右端项为 0 的线性方程组，即形如 $AX = 0$ 的线性方程组，为**齐次**线性方程组。

定理 3.1

任意矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 都存在唯一的一个简化阶梯形矩阵，记做 $\text{rref}(A)$ ，使得 A 与 $\text{rref}(A)$ 行等价。

Outline

- 1 简化阶梯形矩阵
- 2 利用简化阶梯形求解线性方程组
- 3 简化阶梯形的唯一性
- 4 矩阵的秩**
- 5 再议可逆矩阵

秩的定义：有效方程个数

定义 4.1

设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 是一个一般的矩阵。称简化阶梯形矩阵 $\text{rref}(A)$ 的非 0 行数为矩阵 A 的秩，记作 $\text{rank}(A)$ ，或简记为 $r(A)$ 。

秩与线性方程组的解

定理 4.1

设 $A_{m \times n}X = \beta$ 是一个一般的线性方程组, $\tilde{A} = (A, \beta)$ 是其增广矩阵, 则

秩与线性方程组的解

定理 4.1

设 $A_{m \times n}X = \beta$ 是一个一般的线性方程组, $\tilde{A} = (A, \beta)$ 是其增广矩阵, 则

- ① 线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相同, 即

$$r(A) = r(\tilde{A}) = r(A, \beta);$$

秩与线性方程组的解

定理 4.1

设 $A_{m \times n}X = \beta$ 是一个一般的线性方程组, $\tilde{A} = (A, \beta)$ 是其增广矩阵, 则

- ① 线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相同, 即

$$r(A) = r(\tilde{A}) = r(A, \beta);$$

- ② 线性方程组有唯一解的一个充分必要条件是:

$$r(A) = r(\tilde{A}) = n,$$

其中 n 是未知量的个数;

秩与线性方程组的解

定理 4.1

设 $A_{m \times n}X = \beta$ 是一个一般的线性方程组, $\tilde{A} = (A, \beta)$ 是其增广矩阵, 则

- ① 线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相同, 即

$$r(A) = r(\tilde{A}) = r(A, \beta);$$

- ② 线性方程组有唯一解的一个充分必要条件是:

$$r(A) = r(\tilde{A}) = n,$$

其中 n 是未知量的个数;

- ③ 线性方程组有无穷多解的一个充分必要条件是:

$$r(A) = r(\tilde{A}) < n.$$

秩与线性方程组的解

定理 4.2

设线性方程组 $A_{m \times n}X = \beta$ 有无穷多解，则其一般解中自由变量的个数为 $n - r(A)$ ，主变量的个数为 $r(A)$ 。

秩与线性方程组的解

定理 4.2

设线性方程组 $A_{m \times n}X = \beta$ 有无穷多解，则其一般解中自由变量的个数为 $n - r(A)$ ，主变量的个数为 $r(A)$ 。

推论 4.1

齐次线性方程组 $A_{m \times n}X = 0$ 有唯一解的充要条件是 $r(A) = n$ 。

秩与线性方程组的解

定理 4.2

设线性方程组 $A_{m \times n}X = \beta$ 有无穷多解, 则其一般解中自由变量的个数为 $n - r(A)$, 主变量的个数为 $r(A)$ 。

推论 4.1

齐次线性方程组 $A_{m \times n}X = 0$ 有唯一解的充要条件是 $r(A) = n$ 。

定理 4.3

设 A 是一个一般的 $m \times n$ 阶矩阵, P 是一个 m 阶可逆方阵, 则

$$r(A) = r(PA).$$

Outline

- 1 简化阶梯形矩阵
- 2 利用简化阶梯形求解线性方程组
- 3 简化阶梯形的唯一性
- 4 矩阵的秩
- 5 再议可逆矩阵

可逆矩阵的等价条件

定理 5.1

设 A 是一个 n 阶方阵, 则下列命题等价:

可逆矩阵的等价条件

定理 5.1

设 A 是一个 n 阶方阵, 则下列命题等价:

- ① A 可逆;

可逆矩阵的等价条件

定理 5.1

设 A 是一个 n 阶方阵, 则下列命题等价:

- ① A 可逆;
- ② 与 A 行等价的阶梯形矩阵没有全 0 行;

可逆矩阵的等价条件

定理 5.1

设 A 是一个 n 阶方阵，则下列命题等价：

- ① A 可逆；
- ② 与 A 行等价的阶梯形矩阵没有全 0 行；
- ③ 与 A 行等价的简化阶梯形矩阵是单位矩阵 E_n ；

可逆矩阵的等价条件

定理 5.1

设 A 是一个 n 阶方阵, 则下列命题等价:

- ① A 可逆;
- ② 与 A 行等价的阶梯形矩阵没有全 0 行;
- ③ 与 A 行等价的简化阶梯形矩阵是单位矩阵 E_n ;
- ④ 存在初等矩阵 $P_1, \dots, P_k$, 使得 $A = P_1 \cdots P_k$;

可逆矩阵的等价条件

定理 5.1

设 A 是一个 n 阶方阵, 则下列命题等价:

- ① A 可逆;
- ② 与 A 行等价的阶梯形矩阵没有全 0 行;
- ③ 与 A 行等价的简化阶梯形矩阵是单位矩阵 E_n ;
- ④ 存在初等矩阵 $P_1, \dots, P_k$, 使得 $A = P_1 \cdots P_k$;
- ⑤ $r(A) = n$;

可逆矩阵的等价条件

定理 5.1

设 A 是一个 n 阶方阵, 则下列命题等价:

- ① A 可逆;
- ② 与 A 行等价的阶梯形矩阵没有全 0 行;
- ③ 与 A 行等价的简化阶梯形矩阵是单位矩阵 E_n ;
- ④ 存在初等矩阵 $P_1, \dots, P_k$, 使得 $A = P_1 \cdots P_k$;
- ⑤ $r(A) = n$;
- ⑥ $AX = 0$ 只有 0 解;

可逆矩阵的等价条件

定理 5.1

设 A 是一个 n 阶方阵, 则下列命题等价:

- ① A 可逆;
- ② 与 A 行等价的阶梯形矩阵没有全 0 行;
- ③ 与 A 行等价的简化阶梯形矩阵是单位矩阵 E_n ;
- ④ 存在初等矩阵 $P_1, \dots, P_k$, 使得 $A = P_1 \cdots P_k$;
- ⑤ $r(A) = n$;
- ⑥ $AX = 0$ 只有 0 解;
- ⑦ 对任意的 $\beta \in \mathbb{F}^n$, $AX = \beta$ 都有解;

可逆矩阵的等价条件

定理 5.1

设 A 是一个 n 阶方阵, 则下列命题等价:

- ① A 可逆;
- ② 与 A 行等价的阶梯形矩阵没有全 0 行;
- ③ 与 A 行等价的简化阶梯形矩阵是单位矩阵 E_n ;
- ④ 存在初等矩阵 $P_1, \dots, P_k$, 使得 $A = P_1 \cdots P_k$;
- ⑤ $r(A) = n$;
- ⑥ $AX = 0$ 只有 0 解;
- ⑦ 对任意的 $\beta \in \mathbb{F}^n$, $AX = \beta$ 都有解;
- ⑧ 存在 $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 使得 $AB = E_n$;

可逆矩阵的等价条件

定理 5.1

设 A 是一个 n 阶方阵, 则下列命题等价:

- ① A 可逆;
- ② 与 A 行等价的阶梯形矩阵没有全 0 行;
- ③ 与 A 行等价的简化阶梯形矩阵是单位矩阵 E_n ;
- ④ 存在初等矩阵 $P_1, \dots, P_k$, 使得 $A = P_1 \cdots P_k$;
- ⑤ $r(A) = n$;
- ⑥ $AX = 0$ 只有 0 解;
- ⑦ 对任意的 $\beta \in \mathbb{F}^n$, $AX = \beta$ 都有解;
- ⑧ 存在 $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 使得 $AB = E_n$;
- ⑨ 存在 $C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 使得 $CA = E_n$.

例

例 3

设 A, B 是 n 阶方阵, 满足 $AB = A + B$, 证明: $AB = BA$ 。